

## *Concours d'entrée International pour ingénieur de l'Institut Polytechnique de Paris*

### Contenu des connaissances recommandé en Mathématiques

#### 1-ALGEBRE

##### 1.1 Théorie des ensembles

Opérations sur les ensembles, fonctions caractéristiques  
Applications, injectivité, surjectivité, bijectivité  
Image directe, image réciproque d'un ensemble par une application.  
Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrement.

##### 1.2 Nombres et structures usuelles

Lois de composition; groupes, anneaux, corps  
Relations d'équivalence, structures quotient  
Nombres réels, nombres complexes, exponentielle complexe  
Applications à la géométrie plane  
Polynômes, relations entre les coefficients et les racines  
Arithmétique élémentaire (dans  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ )

##### 1.3 Espaces vectoriels de dimension finie (\*)

Familles libres, familles génératrices, bases, dimension  
Déterminant des vecteurs; caractérisation des bases  
Matrices, opérations sur les matrices  
Déterminant d'une matrice carrée; développement par rapport à une ligne ou une colonne;  
rang, cofacteurs.  
Applications linéaires, matrices associées.  
Endomorphismes, trace, déterminant, rang d'un endomorphisme  
Systèmes d'équations linéaires

##### 1.4 Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables  
Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée; matrices  
semblables; interprétation géométrique  
Polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton  
Réduction d'un endomorphisme en dimension finie; endomorphismes diagonalisables

## 1.5 Espaces euclidiens, géométrie euclidienne

Produit scalaire; inégalité de Cauchy-Schwarz; norme et distance associées  
Espaces euclidiens de dimension finie, bases orthonormales; projections orthogonales  
Groupe orthogonal  $O(E)$ ; symétries orthogonales  
Matrices orthogonales; diagonalisation des matrices symétriques réelles  
Propriétés des endomorphismes orthogonaux de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$

(\*) Dans certains pays l'algèbre linéaire s'étudie exclusivement dans  $\mathbb{R}^k$  ou  $\mathbb{C}^k$  nous conseillons vivement aux candidats concernés de se familiariser avec la théorie des espaces vectoriels abstraits

## 2- ANALYSE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

### 2.1 Topologie dans les espaces vectoriels normés de dimension finie

Parties ouvertes, fermées, point adhérent, point intérieur  
Suites convergentes d'éléments d'un espace vectoriel normé, applications continues.  
Parties compactes; image par une application continue d'une partie compacte, existence d'extrema.  
Equivalence des normes

### 2.2 Fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle

Dérivée en un point; applications de classe  $C^1$ , de classe  $C^k$   
Inégalité des accroissements finis; formule de Taylor Dérivation de la limite d'une suite de fonctions  
Primitive d'une fonction continue.  
Fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques, fractions rationnelles).  
Suites et séries de fonctions, convergence simple, convergence uniforme

### 2.3 Intégration sur un intervalle

Intégrale des fonctions continues par morceaux.  
Théorème fondamental du calcul intégral (exprimant l'intégrale d'une fonction en terme de sa primitive)  
Intégration par parties, changement de variable, intégrales dépendant d'un paramètre.  
Continuité sous le signe  $\int$ , dérivation sous le signe  $\int$   
Inégalité de Cauchy-Schwarz.

### 2.4 Séries de nombres, séries entières

Séries de nombres réels ou complexes, convergence simple, convergence absolue  
Comparaison entre une série et une intégrale, produit de deux séries absolument convergentes  
Séries entières, rayon de convergence; fonction développable en série entière sur un intervalle  
Développement en série de Taylor de  $e^t$ , de  $\sin(t)$ , de  $\cos(t)$ , développement de  $\ln(1+t)$ , de  $(1+t)^a$  où  $a$  est réel.

## **2.5 Equations différentielles**

Equations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2, systèmes fondamentaux de solutions

Systèmes linéaires à coefficients constants.

Méthode de la variation des constantes

Notions sur les équations différentielles non linéaires.

## **26 Fonctions de plusieurs variables réelles**

Dérivées partielles, différentielle.

Règle de dérivation des fonctions composées.

Applications différentiables de classe  $C^1$ , théorème de Schwarz pour les fonctions de classe  $C^2$

Difféomorphismes de classe  $C^1$ , théorème d'inversion locale

Points critiques, points d'extrema locaux ou globaux

Courbes planes, tangente, propriétés métriques de courbes planes (longueur d'un arc, courbure), coordonnées polaires

Surfaces dans  $\mathbb{R}^3$ , plan tangent à une surface définie par une équation cartésienne

$F(x,y,z) = 0$