CONCOURS D'ADMISSION FUI 2019 – SESSION AUTOMNE

FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

PHYSICS TEST

(Duration : 2 hours)

The two parts of the subject are independant.
The use of calculators is not allowed.

** * **

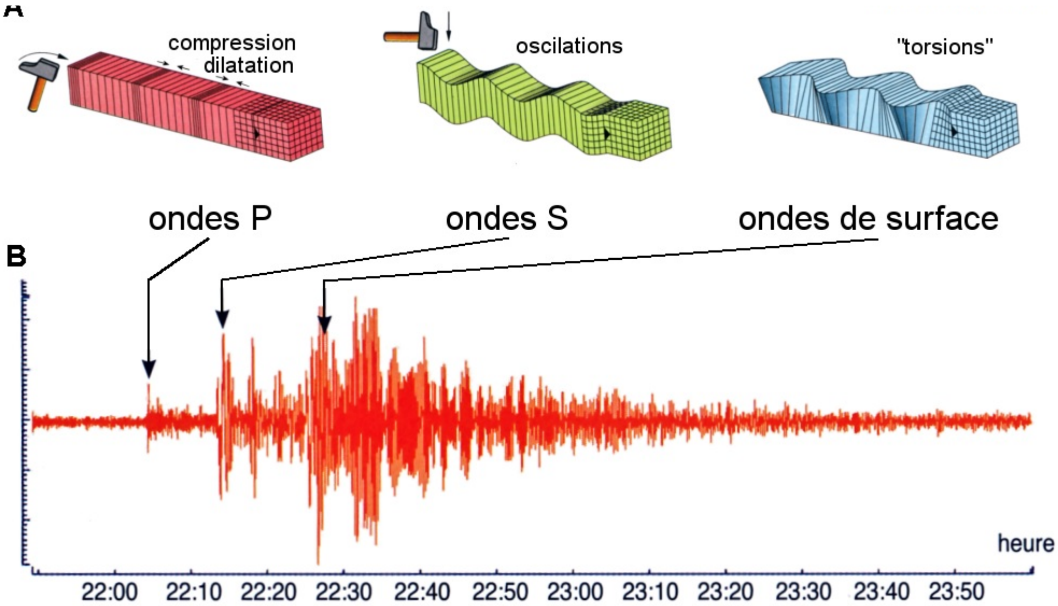
This topic deals with different aspects of seismic waves and their analysis which allows geophysicists to obtain information on the elasticity, the hardness of rocks, the presence of faults or geological anomalies. The seismic waves that travel the Earth may be surface waves or volume waves, transverse or longitudinal.
The subject is composed of a problem and an exercise. The problem proposes some simple modelizations of the seismic waves by studying equivalent mechanical systems. The exercise analyzes a seismic wave detection system.

Mathematical form :

- $\vec{\text{grad}}\,(f(x,y,z)) = (\partial f/\partial x)\,\vec{e}_x + (\partial f/\partial y)\,\vec{e}_y + (\partial f/\partial z)\,\vec{e}_z$
- $\Delta f(x,y,z) = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2$

Problem: modeling P and S seismic waves

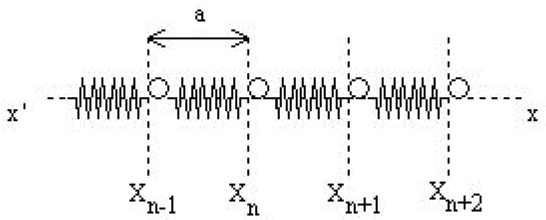
1. The scheme below illustrates the characteristics of different types of seismic waves.



What is a transverse wave? Longitudinal wave? What type of waves do the so-called *P* and *S* seismic waves belong to in the previous scheme?

2. Modeling a longitudinal wave.

The system shown on the next figure is considered to be an infinite succession of masses *m*, distant from each other by a distance *a*, and coupled by non-contiguous massless springs, of spring constant *k*, of rest length equal to the distance *a*.



One assumes that the system is constrained to move along the horizontal axis by a support exerting a reaction force without friction. We note the difference of the position of the n[th] mass with respect to its equilibrium position. Make an assessment of the forces exerted by the springs on the n[th] mass and deduce that the differential equation of its movement is written:

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2} + k\left(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}\right) = 0 \;\; (1).$$

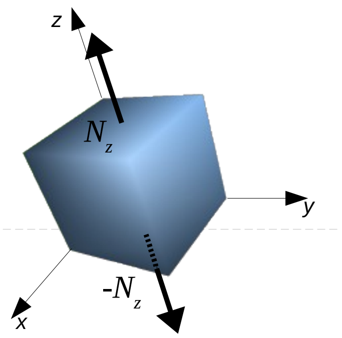
3. Check that the previous differential equation allows solutions of the form:

$$x_n = A\exp i(\omega t - \beta na) + B\exp i(\omega t + \beta na)$$

provided that the temporal pulsation ω and the spatial pulsation β are linked by an equation to be written. Plot the curve representing the variations of ω according to β. Deduce that, in this chain of springs, the waves can propagate only with temporal pulsations less than a cut-off value to be shown on the curve.

4. Longitudinal wave in a solid.

We consider a deformable solid of parallelepipedal shape whose 3 edges define the *0xyz* trihedron. As shown in the figure, a force per unit area N_z is applied on the faces orthogonal to O_z. In the following will be designated by the generic term "constraints" these forces per unit area.



If the solid is isotropic, it remains of parallelepipedal shape, but its length l along O_z undergoes an elongation Δl. Its relative elongation δ_z is given by Hooke's law :

$$\delta_z = \frac{\Delta_l}{l} = \frac{1}{E} N_z$$

where E is the solid's **Young's modulus**.

The other faces of the solid undergo symmetrical contractions, defined by:

$$\delta_x = \delta_y = -\sigma\delta_z = -\frac{\sigma}{E} N_z$$

where we introduced the **Poisson's coefficient** σ.

Give the dimensions of E and σ. What is the value of σ in the ideal case of a perfectly symmetrical and isotropic cube ?

5. For a solid with constraints N_x, N_y and N_z on each of its face, show that we have a simple linear equation :

$$\begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} = \mathcal{M} \cdot \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix}$$

where $\mathcal{M}$ is a symmetrical matrix that one will write as a function of σ and E.

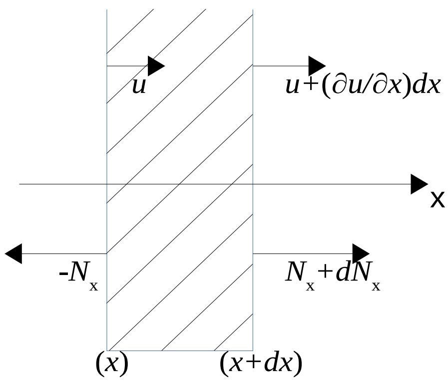
6. One considers a slice of a solid medium, infinite along Oy and Oz and of uniform width along Ox. This plate is stretched along Ox with a constraint N_x. Show in that particular case that :

$$\delta_x = \frac{N_x}{\alpha}$$

with

$$\alpha = E \cdot \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$$

7. We now consider an unlimited homogeneous isotropic medium in which a compression/dilatation disruption propagates, modeled as a propagating constraint, created by a source such as the epicenter of an earthquake, for example. On the next figure one shows a slice of a solid medium stretched at time t by a contrainst N_x. Initially the medium is between the planes x and $x + dx$.



Under the constraint's action, the first plane moves by a quantity $u(x,t)$. At the same time t, the elongation of the plane of $x + dx$ abscissa will write : $u + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx$.

By adopting the notations of the diagram above, justify that the plane of abscissa $x + dx$ undergoes the constraint :

$$N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx = N_x + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.$$

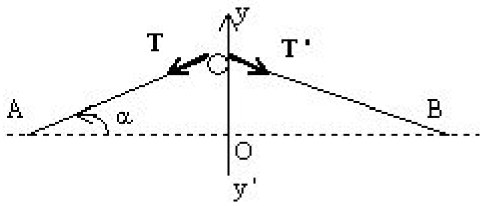
8. Applying the fundamental principle of dynamics to the solid's slice, whose density ρ is considered as a constant, show that one leads to the equation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \;\; (2),$$

where we will express the parameter V_l as a fonction of ρ and α. What is the dimension of this parameter? What does it represent in relation to the propagation of the wave ?
Considering that the elongations of the springs of question **2.** are infinitely small, study the analogy between equations (1) and (2).

9. Modeling a transverse wave.

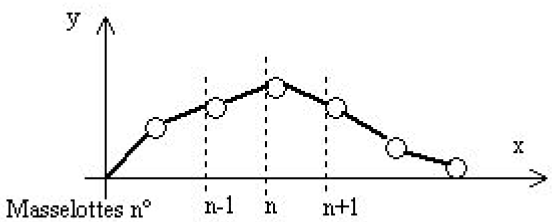
We now consider a mass weight *m*, connected by two identical massless wires without elasticity at two fixed points *A* and *B* (*OA* = *OB* = *a*) as shown in the figure. The axis *Oy* is vertical ascending. The horizontal axis is noted *Ox*.



The wires exert tension forces on the masses whose direction remains tangent to the wires. We move the mass of an ordinate y perpendicular to the axis *AB*. Show that both tensions have the same modulus and establish the differential equation in y assuming that the angle of inclination α of each of the wires with respect to the *Ox* axis is small. How would this result be modified if the gravity field was taken into account ?

10. We consider an infinite succession of masses *m*, distant from each other of the same distance *a*, and coupled by a wire without mass and elasticity. Each wire, of length *a*, exerts a tension of the same modulus *T* constant at both ends.

The system is shown in the figure below.



The gravitational forces are neglected with respect to the forces exerted by the wires on the masses. In this question we study strictly transverse movements. We note y_n the ordinate of the displacement of the mass *n*.

Write for the nth mass, the differential equation of the movement according to the ordinates y_{n-1}, y_n and y_{n+1}. This equation will be noted (3).

11. Check then that one can write a solution of the form :

$$y_n = A' \exp i(\omega' t - \beta' na) + B' \exp i(\omega' t + \beta' na)$$

provided the temporal pulsation ω' and the spatial pulsation β' are linked by an equation that one will write. Compare to the solution found in **4.**

12. A reasoning similar to that which was conducted in questions **4.** to **8.** applies when one is interested in shear stresses (parallel to the faces of a solid) rather than compression stresses (normal to faces of a solid).
Denoting v the transverse elongation one finds the propagation equation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{V_t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \;\; (4).$$

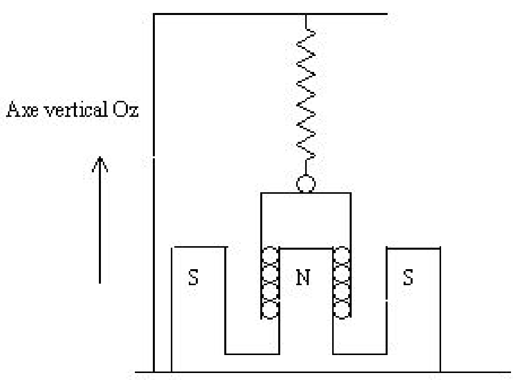
Knowing that the *S* waves get their name from the Latin *Secondae* (which come in second position) and that the *P* waves draw theirs from the Latin *Primae* (which come in first position), propose an equation of order between the parameters and in connection with the figure in question **1.**

13. Comment on the similarities between equations (1) and (3) obtained in "discrete" models on the one hand, and equations (2) and (4) obtained in "continuous" models on the other hand.

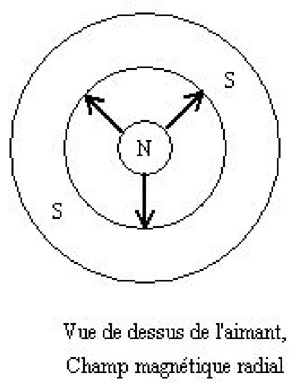
Exercise: Recording of seismic movements using a seismograph.

1. A mass *M* is suspended, by means of a massless spring of constant *k*, to a frame relative. With respect to this frame the mass undergoes a vertical movement without friction, in the gravity field, assumed uniform, *g*. Let *O* be the spring suspension point on the chassis. We note *z* the ordinate of the mass with respect to the point *O*, z_e the rest value of *z* and $Z = z - z_e$. It is assumed that the chassis is subject to the vertical ground vibration : $Z_{\text{sol}} = Z_0 \cos \omega t$. The system is shown below. We can associate to any physical quantity *Z* the complex quantity $\underline{Z}$ which real part is *Z*. Hence $\underline{Z}_{\text{sol}} = Z_0 \exp j\omega t$ where $j^2 = -1$.

Write the differential equation governing the variations of *Z* in the frame supposed Galilean. What is the forced sinusoidal response of the system to ground vibration, in the form of a relationship $\underline{Z} = A(\omega)\underline{Z_{\text{sol}}}$, where the factor *A* is expressed according to the characteristics of the device ?



Vue en coupe



Vue de dessus de l'aimant,
Champ magnétique radial

2. The mass is more firmly attached to a negligible mass coil, with electrical resistance *r* (we will neglect the coefficient of self-induction *L* of the coil). The coil comprises *N* turns, each of length *l* and it has the same vertical movement as the mass, while remaining entirely in the gap of a magnet creating in the coil a radial magnetic field having the same constant standard in all directions. The terminals of the coil are closed on a resistor r' and the total resistance of the circuit thus constituted is noted $R = r + r'$.

Write the equation of mechanical balance of the mass movement.

3. Write the electrical equation of the loop formed by the coil and the resistor on which the coil is closed.

Deduce the response of the system to a ground vibration, on the form of an equation $\underline{Z} = \underline{A'}(\omega)\underline{Z_{\mathrm{sol}}}$, where the factor A' will be expressed as a function of the characteristics of the device.

4. Which conditions should be satisfied by the ground vibration pulsation ω in order that *Z* is proportional to Z_{sol} ? Is the voltage drop at the terminals of resistor r' proportional to the ground vibration ? By what type of electrical circuit should one replace resistor r' to get a signal proportional to the ground vibration ? Propose a scheme of the circuit.

CONCOURS D'ADMISSION FUI 2019 SESSION AUTOMNE

FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 2 heures)

Les deux parties de cette épreuve sont largement indépendantes.
L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

*** * ***

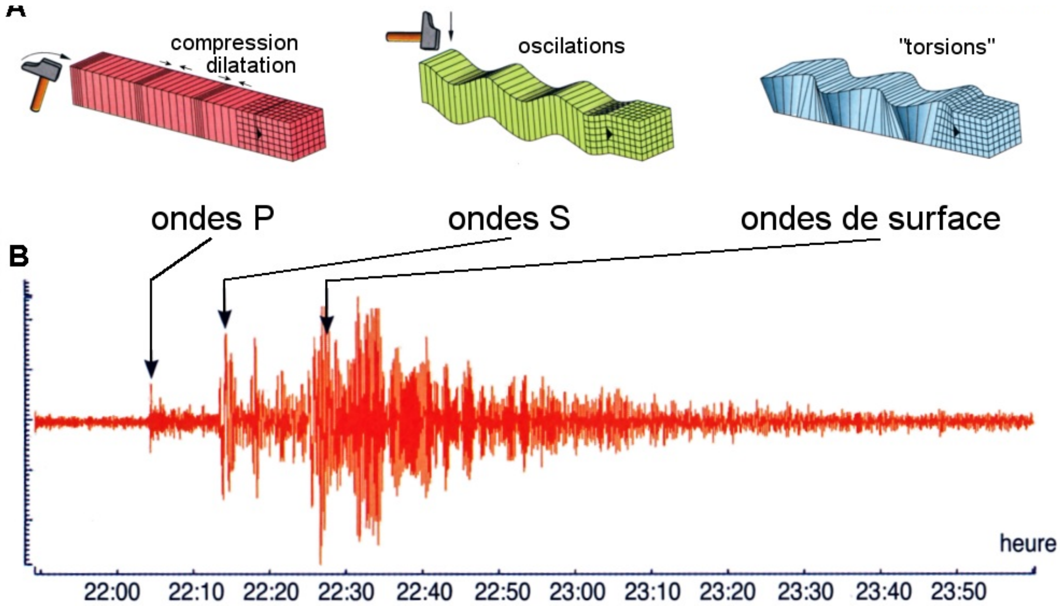
Ce sujet parle de différents aspects des **ondes sismiques** et de leur analyse qui permet aux géophysiciens d'obtenir de l'information sur l'élasticité, la dureté des roches, la présence de failles ou d'anomalies géologiques. Les ondes sismiques qui parcourent la Terre peuvent être des ondes de surface ou des ondes de volume, transversales ou longitudinales. Le sujet comporte un problème et un exercice. Le problème propose quelques modélisations simples des ondes sismiques par des systèmes mécaniques équivalents. L'exercice analyse un système de détection des ondes sismiques.

Formulaire :

- $\vec{\mathrm{grad}}\,(f(x,y,z)) = (\partial f/\partial x)\,\vec{e}_x + (\partial f/\partial y)\,\vec{e}_y + (\partial f/\partial z)\,\vec{e}_z$
- $\Delta f(x,y,z) = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2$

Problème : modélisation des ondes sismiques P et S

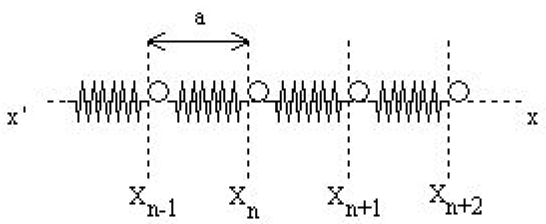
1. Le schéma ci-dessous illustre les caractéristiques de différentes ondes sismiques.



Qu'appelle-t-on onde transversale ? Onde longitudinale ? A quel type d'ondes appartiennent les ondes sismiques dites P et S sur le schéma précédent ?

2. Modélisation d'une vibration longitudinale.

On considère le système représenté ci-contre d'une suite infinie de masselottes de masse *m*, distantes les unes des autres d'une distance *a*, et couplées par des ressorts à spires non jointives, sans masse, de raideur *k*, de longueur à vide égale à la distance *a*.



On suppose le système astreint à se déplacer selon l'axe horizontal par un support exerçant une force de réaction sans frottement. On note x_n l'écart de la position de la n-ième masselotte par rapport à l'équilibre. Faire un bilan des forces exercées par les ressorts sur la n-ième masselotte et en déduire que l'équation différentielle de son mouvement s'écrit :

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2} + k\,(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0 \;\; (1).$$

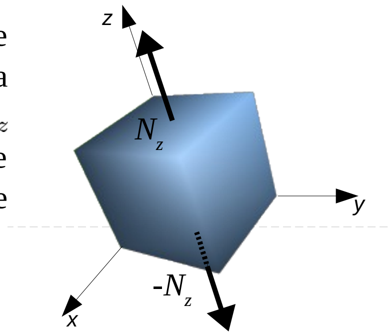
3. Vérifier que l'équation différentielle précédente admet des solutions de la forme :

$$x_n = A\exp i(\omega t - \beta na) + B\exp i(\omega t + \beta na)$$

à condition que la pulsation temporelle ω et la pulsation spatiale β soient reliées par une relation que l'on explicitera. Tracer la courbe représentant les variations de ω en fonction de β. En déduire que, dans cette chaîne de ressorts, les ondes ne peuvent se propager qu'à des pulsations temporelles inférieures à une pulsation de coupure que l'on fera apparaître sur la courbe.

4. Onde longitudinale dans un solide.

On considère un solide déformable de forme parallélépipédique dont 3 arêtes définissent le trièdre *0xyz*. Comme illustré sur la figure ci-contre, on exerce une force par unité de surface N_z sur les faces normales à O_z. Dans la suite on désignera par le terme générique de "contraintes" ces forces par unité de surface.



Si le solide est isotrope, il reste de forme parallélépipédique, mais sa longueur l suivant O_z subit un allongement Δl. Son allongement relatif δ_z est donné par la loi de Hooke :

$$\delta_z = \frac{\Delta_l}{l} = \frac{1}{E} N_z$$

où E est le **module d'Young** du solide.

Les autres faces du solide subissent quant à elles des contractions symétriques, définies par :

$$\delta_x = \delta_y = -\sigma \delta_z = -\frac{\sigma}{E} N_z$$

où l'on a introduit le **coefficient de Poisson** σ.

Donner les dimensions de E et σ. Que vaut σ dans le cas idéal d'un cube parfaitement symétrique et isotrope ?

5. Pour un solide subissant des contraintes N_x, N_y et N_z sur chacune de ces faces, montrer que l'on a une relation linéaire simple du type :

$$\begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} = \mathcal{M} \cdot \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{M}$ est une matrice symétrique que l'on explicitera en fonction de σ et de E.

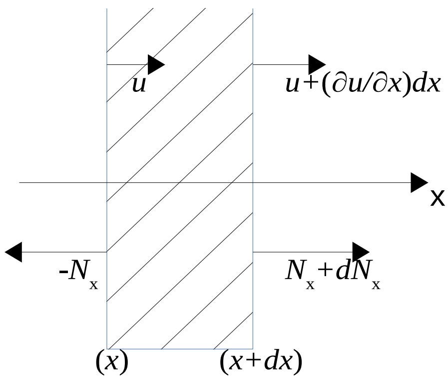
6. On considère une plaque solide infinie selon Oy et Oz et d'épaisseur uniforme selon Ox. On étire cette plaque selon Ox avec une contrainte N_x. Montrer que dans ce cas particulier :

$$\delta_x = \frac{N_x}{\alpha}$$

avec

$$\alpha = E \cdot \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$$

7. On considère maintenant un milieu homogène illimité isotrope dans lequel se propage une perturbation dont les effets sont de comprimer/dilater le milieu lors de son passage. On considère donc que cette perturbation peut se modéliser par une contrainte qui se propage au sein du



milieu, créée par une source telle que l'épicentre d'un séisme par exemple. Sur la figure ci-contre on a représenté une tranche d'un milieu solide étiré à l'instant t par une contrainte N_x. Initialement le milieu est compris entre les plans d'abscisse x et $x + dx$.

Sous l'action de la contrainte, le premier plan se déplace d'une quantité $u(x,t)$. Au même instant t, l'élongation du plan d'abscisse $x + dx$ s'écrira : $u + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx$.

En adoptant les notations du schéma ci-dessus, justifier que le plan d'abscisse $x + dx$ subit la contrainte :

$$N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx = N_x + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.$$

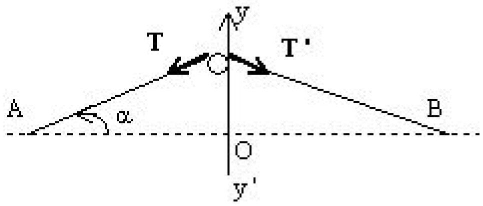
8. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la tranche de solide, dont la masse volumique ρ sera considérée comme constante, montrer que l'on aboutit à l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ \ (2),$$

où l'on exprimera le paramètre V_l en fonction de ρ et α. Quelle est la dimension de ce paramètre ? Que représente-t-il par rapport à la propagation de la perturbation ?
En considérant que les élongations des ressorts de la question **2.** sont des infiniment petits, étudier l'analogie entre les équations (1) et (2).

9. Modélisation d’une vibration transversale.

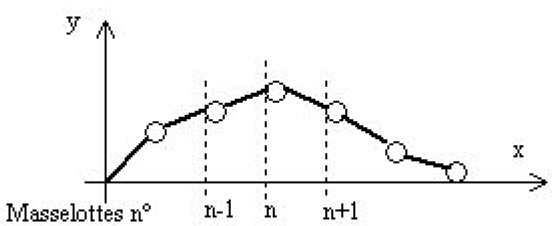
On considère maintenant une masselotte de masse *m*, reliée par deux fils identiques sans masse et sans raideur à deux points fixes *A* et *B* (*OA* = *OB* = *a*) comme illustré sur la figure ci-contre. L’axe *Oy* est vertical ascendant. L’axe horizontal est noté *Ox*.



Les fils exercent des forces de tension sur la masselotte dont la direction reste tangente aux cordes. On écarte la masselotte d'une ordonnée y perpendiculairement à l'axe portant *AB*. Montrer que les deux tensions ont la même norme et établir l’équation différentielle en y en supposant que l’angle d’inclinaison α de chacun des fils par rapport à l’axe *Ox* est faible. Comment ce résultat serait-il modifié si l'on tenait compte du champ de pesanteur ?

10. On considère une suite infinie de masselottes de masse *m*, distantes les unes des autres d’une même distance *a*, et couplées par un fil sans masse et sans raideur. Chaque fil, de longueur *a*, exerce une tension de même norme *T* constante à ses deux extrémités.

Le système est représenté sur la figure ci-dessous.



On néglige les forces de pesanteur devant les forces exercées par les fils sur les masselottes. On étudie dans cette question des mouvements strictement transversaux. On note y_n l'ordonnée du déplacement de la masselotte *n*.

Écrire pour la n-ième masselotte, l'équation différentielle du mouvement en fonction des ordonnées y_{n-1}, y_n et y_{n+1}. Cette équation sera notée (3).

11. Vérifier alors qu'on peut écrire une solution de la forme :

$$y_n = A' \exp i(\omega' t - \beta' na) + B' \exp i(\omega' t + \beta' na)$$

à condition que la pulsation temporelle ω' et la pulsation spatiale β' soient reliées par une relation que l'on explicitera. Comparer à la relation obtenue en **4.**

12. Un raisonnement similaire à celui qui a été conduit dans les questions **4.** à **8.** s'applique lorsque l'on s'intéresse aux contraintes de cisaillement (parallèles aux faces d'un solide) plutôt qu'aux contraintes de compression (normales aux faces d'un solide).
En appelant v l'élongation transversale on trouve en particulier l'équation de propagation:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{V_t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \ \ (4).$$

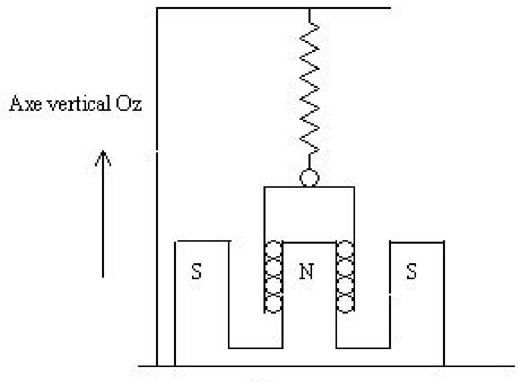
Sachant que les ondes *S* tirent leur nom du latin *Secondae* (qui arrivent en seconde position) et que les ondes *P* tirent le leur du latin *Primae* (qui arrivent en première positon), proposer une relation d'ordre entre les paramètres V_l et V_t en lien avec la figure de la question **1.**

13. Commenter les similitudes entre les équations (1) et (3) obtenues dans les modèles "discrets" d'une part, et les équations (2) et (4) obtenues dans les modèles "continus" d'autre part.

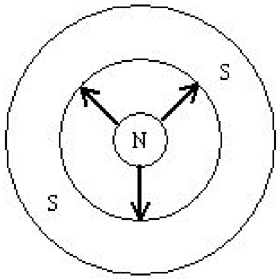
Exercice : Enregistrement des mouvements sismiques à l'aide d'un sismographe.

1. Une masselotte de masse *M* est suspendue, par l'intermédiaire d'un ressort sans masse de raideur *k*, à un bâti par rapport auquel la masselotte subit un déplacement vertical sans frottement, dans le champ de pesanteur supposé uniforme et de norme *g*. Soit *O* le point de suspension du ressort sur le châssis. On note *z* l'ordonnée de la masselotte par rapport au point *O*, z_e la valeur de cette ordonnée au repos et $Z = z - z_e$. On suppose que le châssis est soumis à une vibration verticale du sol : $Z_{\text{sol}} = Z_0 \cos \omega t$. Le système est représenté ci-dessous. On pourra associer à toute grandeur physique *Z* la grandeur complexe $\underline{Z}$ dont *Z* est la partie réelle. Ainsi $\underline{Z}_{\text{sol}} = Z_0 \exp j\omega t$ où $j^2 = -1$.

Écrire l'équation différentielle qui régit les variations de *Z* dans le repère terrestre supposé galiléen. Quelle est la réponse en régime sinusoïdal forcé du système à la vibration du sol, sous la forme d'une relation $\underline{Z} = A(\omega)\underline{Z_{\text{sol}}}$, où l'on explicitera le facteur de proportionnalité *A* en fonction des caractéristiques de l'appareil ?



Vue en coupe



Vue de dessus de l'aimant,
Champ magnétique radial

2. La masselotte est de plus solidaire d'une bobine de masse négligeable, de résistance électrique *r* (on négligera le coefficient d'auto-induction *L* de la bobine). La bobine comporte *N* spires, chacune de longueur *l* et elle a le même mouvement vertical que la masselotte, tout en restant toute entière dans l'entrefer d'un électroaimant créant dans la bobine un champ magnétique radial ayant la même norme constante dans toutes les directions. Les bornes de la bobine sont fermées sur une résistance r' et on note $R = r + r'$ la résistance totale du circuit ainsi constitué.

Écrire l'équation de bilan mécanique du mouvement de la masselotte.

3. Écrire ensuite l'équation de bilan électrique de la boucle formée par la bobine et la résistance sur laquelle la bobine est fermée.

En déduire la réponse du système à la vibration du sol, sous la forme d'une relation $\underline{Z} = \underline{A'}(\omega)\underline{Z_{\text{sol}}}$, où l'on explicitera le facteur de proportionnalité A' en fonction des caractéristiques de l'appareil.

4. Quelles conditions doit vérifier la pulsation ω de la vibration du sol pour que *Z* soit proportionnel à Z_{sol} ? La tension aux bornes de la résistance r' est-elle alors proportionnelle à la vibration du sol ? Quel type de montage électrique faut-il introduire à la place de r' pour obtenir un signal proportionnel à la vibration du sol ? Proposer un schéma du montage.