

CONCOURS D'ADMISSION 2018 – FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

FALL SESSION

PHYSICS

(Duration : 2 hours)

The three problems are independent. If you are not able to solve a question, we advise you to assume the result of that question and to move to the next one. The different questions are, to a large extent, independent of each other.

The use of electronic calculators is forbidden.

I. Propagation in a coaxial cable

The aim of this problem is to find relations between the physical parameters of a coaxial cable that optimize the propagation of potential waves.

A coaxial cable (Figure 1) is made of :

- (i) A copper wire, with a radius a and conductivity γ ;
- (ii) An insulation material with a dielectric constant ϵ_r and leak conductivity γ_r ;
- (iii) A copper mesh with the same conductivity γ as the wire, with a radius b and negligible thickness ;
- (iv) An outside insulation.

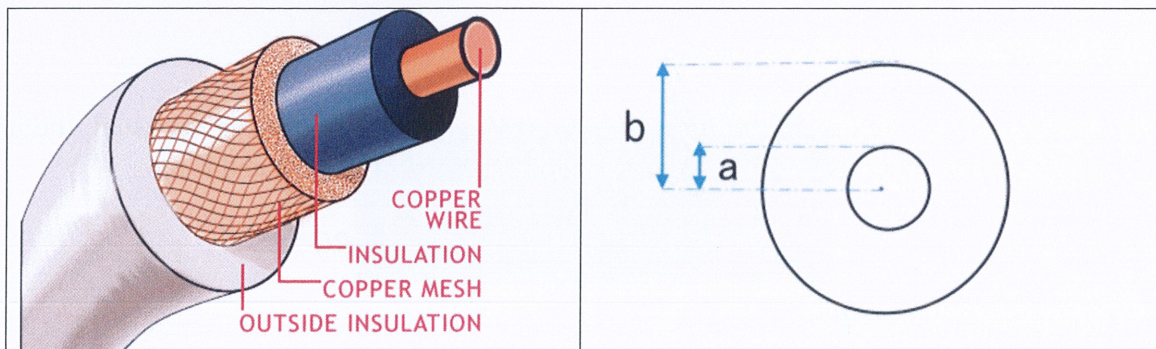


Figure 1. Left : constitution of a coaxial cable. Right : sectional view of the cable (see text for details).

1) Modeling of a coaxial cable.

Compute the following electrical quantities as a function of $a, b, \gamma, \gamma_r, \epsilon_r$ and the fundamental electric constants ϵ_0 and μ_0 :

- the resistance per unit length of the copper wire, denoted R ;
- the leak conductance per unit length of cable, denoted G ; note : for this computation you may assume that the copper wire is at potential V and the copper mesh at zero potential, then compute the electrical field between the copper wire and the copper mesh, hence deduce the leaking electric current intensity flowing through the insulation material ;
- the capacity per unit length of cable, denoted C ;
- the self-inductance per unit length of cable, denoted L ; note : for this computation, it may be useful to remember that the volume density of magnetic energy is $\frac{B^2}{2\mu_0}$.

2) Wave equation for the electric potential (« telegraph equations »).

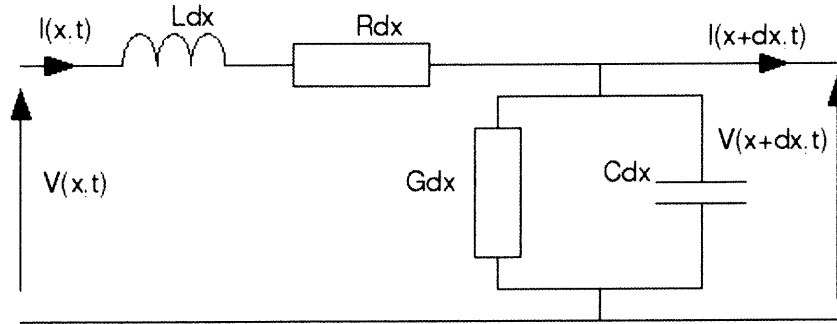


Figure 2. Electric diagram equivalent to an infinitesimal segment of coaxial cable of length dx . $V(x,t)$ is the tension between the internal wire and the copper mesh (which is connected to the ground, hence tied to zero potential). $V(x,t)$ is therefore the electric potential of the internal wire at position x and time t . $I(x,t)$ is the current intensity in the internal copper wire.

Beware : whereas Rdx is the *resistance* of an infinitesimal segment of copper wire, Gdx is the *conductance* of an infinitesimal segment of insulation material.

Find two partial derivative equations that are satisfied by $V(x,t)$ and $I(x,t)$.

3) Hence deduce an equation for $V(x,t)$.

- We look for solutions in the form $V(x,t) = V_0 e^{j(\omega t - kx)}$ where j is, as usual, the unit imaginary number. Derive the following relationship between ω and k :

$$k^2 = LC\omega^2 - j(RC + GL)\omega - RG$$

5) Quasi stationary regime.

Let's assume that $GL \ll RC$ and $R \gg L\omega$.

- Prove that the partial differential equation for $V(x,t)$ now writes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RC \frac{\partial V}{\partial t} + RGV$$

- b) Show that $V(x, t) = V_0 e^{j(\omega t - k'x)} e^{k''x}$ is a solution of this equation with k' and k'' two real constants to be determined. Assuming that $G \gg C\omega$, give k' as a function of R , G , C and ω , and k'' as a function of R and G .
- c) What is the propagation speed (phase velocity) of the potential wave $V(x, t)$?

6) High frequency regime.

Let's assume now that $R \ll L\omega$ and $G \ll C\omega$. We note $LC = \frac{1}{c_0^2}$.

- a) Compute the real and imaginary parts of the wave vector k .
- b) What is the meaning of c_0 ?
- c) Show that the amplitude of the potential wave decreases exponentially with the distance x along the cable. Express the characteristic distance of damping λ as a function of L , C , R , G .

7) Heaviside condition.

Show that the cable is non dispersive if and only if the following condition, known as « Heaviside condition », is satisfied:

$$\frac{L}{C} = \frac{R}{G}$$

We recall that a nondispersive medium is a medium where the phase velocity of the propagating waves is independent of the wave frequency. What is the advantage of a nondispersive medium ?

II. Laying cables under the sea : mechanical problems

Most intercontinental communications are still going through undersea cables. Specialized ships are used to lay cables under the sea : such ships have a cable winch (big spool) at their stern (rear end of the ship) around which the cable is coiled. As the ship is moving, the cable is unwound from the winch. A diagram of the cable shape underwater is given in Figure 3.

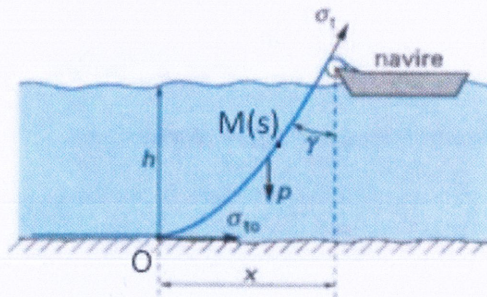


Figure 3. Diagram of a ship (« navire » in french) laying a cable under the sea. Note the cable winch at the stern (rear end of the ship). At the end of the cable winch, the tangent line to the cable is at an angle γ with the vertical line. The *apparent* linear weight density (weight of the unit length of cable minus Archimedes' buoyant force) is denoted p .

Let s denote the curvilinear abscissa along the cable, i.e. the length of cable between the origin O and the point $M(s)$. We note $\alpha(s)$ the angle between the tangent to the cable at point $M(s)$ and the vertical line.

- 1) Let λ be the linear mass density of the cable and D the cable diameter. Usual cables have $\lambda = 10 \text{ kg.m}^{-1}$ and $D = 70 \text{ mm}$. Evaluate the *apparent* linear weight density p (see Figure 3 and its legend).
- 2) The ship is assumed to be at rest. Write the mechanical equilibrium of an infinitesimal segment of cable of length ds .
- 3) Prove that the tension σ_t everywhere along the cable satisfies the two following equations :

$$\begin{aligned}\sigma_t \sin \alpha &= \sigma_{t0} \\ \sigma_t \cos \alpha &= ps\end{aligned}$$

- 4) Hence deduce the following relation between x and h (see Figure 3) :

$$h = \frac{\sigma_{t0}}{p} \left[ch \left(\frac{px}{\sigma_{t0}} \right) - 1 \right]$$

- 5) The ship now moves at a constant speed V . Assuming that V is low enough, explain why the equilibrium equations derived in questions 2 and 3 are still satisfied. What is the physical meaning of « low enough » ?
- 6) At this speed V , the ship engine exerts a force F on the ship. Compute the angle γ between the cable and the vertical line at the end of the cable winch (see Figure 3) as a function of F , p and h .

III. A clever measuring cup

In order to improve measuring for cooking, engineers have designed a new shape of measuring cup (see Figure 4).

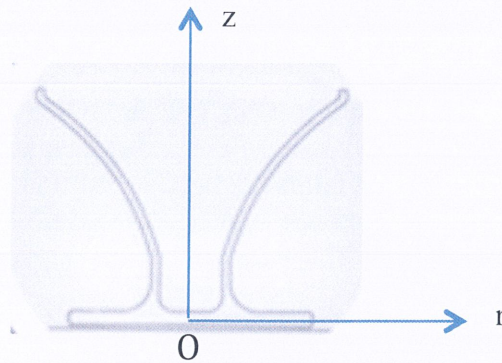


Figure 4 : vertical sectional view of the new shape of measuring cup. Note that Oz is a rotational axis of symmetry of the measuring cup.

The engineers argue that the best shape must fulfill the following equation:

$$\frac{A(z)}{\int_0^z A(u)du} = k \quad (\text{III.1})$$

where k is a constant. $A(z)$ is the area of the horizontal sectional view at height z .

- 1) What is the rationale for this equation ?
- 2) What is the meaning of the constant k ? Give an estimate for k .
- 3) Find out a solution of Equation III.1 giving r as a function of z .

CONCOURS D'ADMISSION 2018 – FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

SESSION D'AUTOMNE

PHYSIQUE

(Durée : 2 heures)

Les trois problèmes sont indépendants. Si vous êtes bloqué sur une question, nous vous recommandons d'accepter le résultat de cette question et de passer à la question suivante. Les différentes questions sont en grande partie indépendantes.

L'usage des calculatrices électroniques est interdit.

I. Propagation dans un câble coaxial

L'objectif de ce problème est d'établir des relations entre les paramètres physiques d'un câble coaxial qui optimisent la propagation des ondes de potentiel électrique.

Un câble coaxial (Figure 1) est constitué de :

- (i) Un fil de cuivre (âme), de rayon a et de conductivité γ ;
- (ii) Un isolant de constante diélectrique ϵ_r et de conductivité γ_r ;
- (iii) Une tresse de fils de cuivre de même conductivité γ que le fil central, de rayon b et d'épaisseur négligeable ;
- (iv) Un isolant externe.

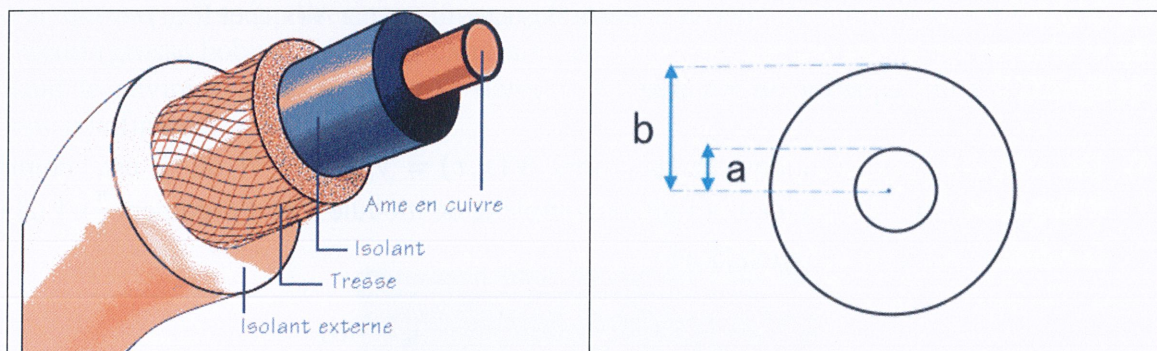


Figure 1. A gauche: composition d'un câble coaxial. A droite: coupe transverse du câble (voir détails dans le texte).

1) Modélisation d'un câble coaxial.

Calculer les caractéristiques électriques suivantes en fonction de a , b , γ , γ_r , ϵ_r et des constantes électriques fondamentales ϵ_0 et μ_0 :

- La résistance par unité de longueur du fil de cuivre central (âme), notée R ;
- La conductance de fuite par unité de longueur de câble, notée G ; note : pour effectuer ce calcul on pourra supposer que le fil central est au potentiel V et la tresse au potentiel nul, puis calculer le champ électrique associé entre le fil et la tresse de cuivre et en déduire l'intensité du courant électrique de fuite à travers l'isolant ;
- La capacité par unité de longueur de câble, notée C ;
- L'inductance propre par unité de longueur de câble, notée L ; note : pour effectuer ce calcul, on pourra utiliser le fait que la densité volumique d'énergie magnétique s'écrit : $\frac{B^2}{2\mu_0}$.

2) Equation d'onde pour le potentiel électrique (« équations des télégraphistes »).

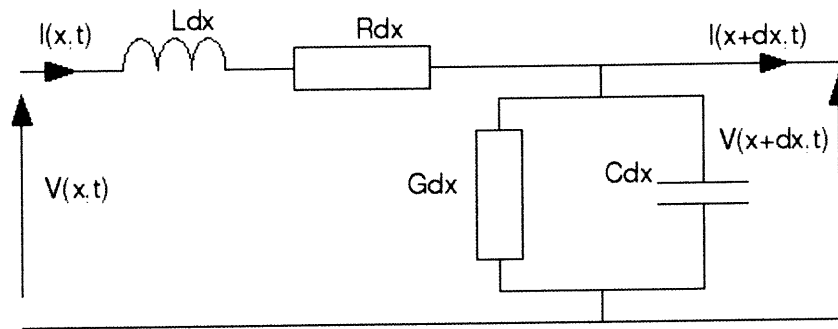


Figure 2. Schéma électrique équivalent d'un élément de câble de longueur dx . $V(x,t)$ est la tension entre le fil central et la tresse de cuivre (reliée à la terre, donc au potentiel nul). $V(x,t)$ est donc le potentiel électrique du fil central au point x et à l'instant t . $I(x,t)$ est l'intensité du courant électrique qui circule dans le fil central.

Attention: Rdx est la *résistance* d'un segment élémentaire de fil de cuivre, Gdx est la *conductance* d'un segment élémentaire d'isolant.

Etablir deux équations aux dérivées partielles satisfaites par $V(x,t)$ et $I(x,t)$.

3) En déduire une équation pour $V(x,t)$.

- 4) On cherche des solutions de la forme $V(x,t) = V_0 e^{j(\omega t - kx)}$ où j est, comme d'habitude, l'unité imaginaire (nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$). Etablir la relation suivante entre ω et k :

$$k^2 = LC\omega^2 - j(RC + GL)\omega - RG$$

5) Régime quasi-stationnaire.

On suppose que $GL \ll RC$ et $R \gg L\omega$.

- a) Montrer que l'équation aux dérivées partielles pour $V(x,t)$ s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RC \frac{\partial V}{\partial t} + RGV$$

- b) Montrer que $V(x, t) = V_0 e^{j(\omega t - k'x)} e^{k''x}$ est une solution de cette équation avec k' et k'' deux constantes réelles à déterminer. En supposant que $G \gg C\omega$, donner k' en fonction de R, G, C et ω , et k'' en fonction de R et G .
- c) Quelle est la vitesse de propagation (vitesse de phase) de l'onde de potentiel $V(x, t)$?
- 6) Régime hautes fréquences.
On suppose maintenant que $R \ll L\omega$ et $G \ll C\omega$. On note $LC = \frac{1}{c_0^2}$.
- a) Calculer les parties réelle et imaginaire du vecteur d'onde k .
- b) Quelle est la signification de c_0 ?
- c) Montrer que l'amplitude de l'onde de potentiel décroît exponentiellement avec la distance x le long du câble. Exprimer la distance caractéristique d'amortissement λ en fonction de L, C, R, G .
- 7) Condition de Heaviside.
Montrer que le câble est un milieu non dispersif si et seulement si la condition suivante, appelée « condition de Heaviside », est satisfaite :

$$\frac{L}{C} = \frac{R}{G}$$

On rappelle qu'un milieu non dispersif est un milieu dans lequel la vitesse de phase d'une onde progressive ne dépend pas de la fréquence de cette onde. Quel est l'intérêt d'avoir un milieu non dispersif ?

II. Pose des câbles sous-marins: problèmes mécaniques

La plupart des télécommunications intercontinentales passent par des câbles sous-marins. Il existe des navires spécialisés qui déposent ces câbles au fond des mers : ces navires possèdent un treuil (grosse bobine placée à l'extrémité arrière du navire) sur lequel est enroulé le câble. Quand le navire avance, le câble se déroule. Un schéma du câble en train d'être posé est donné à la figure 3.

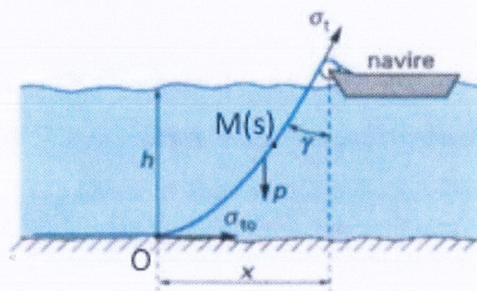


Figure 3. Schéma d'un navire en train de déposer un câble au fond de la mer. Noter le treuil à l'arrière du navire. A la sortie du treuil, la tangente au câble fait un angle γ avec la verticale. Le poids linéique *apparent* (poids de l'unité de longueur de câble moins la poussée d'Archimède) est noté p .

Soit s l'abscisse curviligne le long du câble, i.e la longueur de câble entre l'origine O et le point $M(s)$. On note $\alpha(s)$ l'angle entre la tangente au câble au point $M(s)$ et la verticale.

- 1) Soit λ la masse linéique du câble et D son diamètre. Pour les câbles usuels, on a : $\lambda = 10 \text{ kg.m}^{-1}$ et $D = 70 \text{ mm}$. Evaluer le poids linéique apparent p (voir la Figure 3 et sa légende).
- 2) On suppose que le navire est au repos. Ecrire l'équilibre mécanique d'un segment élémentaire de câble de longueur ds .
- 3) Montrer que la tension σ_t en tout point du câble vérifie les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_t \sin \alpha &= \sigma_{t0} \\ \sigma_t \cos \alpha &= ps\end{aligned}$$

- 4) En déduire la relation suivante entre x et h (voir Figure 3) :

$$h = \frac{\sigma_{t0}}{p} \left[ch \left(\frac{px}{\sigma_{t0}} \right) - 1 \right]$$

- 5) Le navire se déplace maintenant à vitesse constante V . En supposant que la vitesse est suffisamment faible, expliquer pourquoi les équations d'équilibre établies aux questions 2 et 3 sont encore satisfaites. Quelle est la signification physique de « suffisamment faible » ?
- 6) A cette vitesse V , le moteur du navire exerce une force F sur le navire. Calculer l'angle γ que fait le câble à la sortie du treuil avec la verticale (voir Figure 3) en fonction de F , p et h .

III. Un verre doseur intelligent

Pour améliorer la précision des mesures en cuisine, des ingénieurs ont créé un nouveau modèle de verre doseur (voir Figure 4).

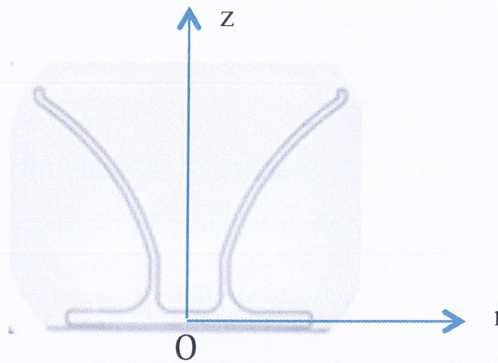


Figure 4 : coupe verticale du nouveau modèle de verre doseur. Noter que le verre doseur possède une symétrie de révolution autour de l'axe Oz.

Les ingénieurs revendiquent que la forme optimale doit satisfaire l'équation suivante :

$$\frac{S(z)}{\int_0^z S(u)du} = k \quad (\text{III.1})$$

où k est une constante. $S(z)$ est la surface de la coupe horizontale du verre doseur à la cote z .

- 1) Que signifie physiquement cette équation ?
- 2) Que représente la constante k ? Estimer la valeur de k .
- 3) Trouver une solution de l'équation III.1 en exprimant r en fonction de z .

CONCOURS D'ADMISSION 2018 – FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

SPRING SESSION

PHYSICS

(Duration : 2 hours)

The three problems are independent. If you are not able to solve a question, we advise you to assume the result of that question and to move to the next one. The different questions are, to a large extent, independent of each other.

The use of electronic calculators is forbidden.

Vectors are represented by bold letters in the first two problems.

I. Physics of stringed instruments

The aim of this problem is to understand how strings are sounded by drawing a bow across them, as is the case for all stringed instruments such as violin, cello etc.

Let us consider a violin string and a bow drawing across it (Figure 1) :

- (i) The string is under tension and the tension is denoted T
- (ii) The length of the string is denoted $2L$ and its linear mass density is denoted λ
- (iii) We recall that the moment of inertia I of a rod of length L and linear mass density λ , about a perpendicular axis through one of its extremities, is $I = \frac{1}{3} \lambda L^3$
- (iv) The violinist draws the bow with constant velocity V
- (v) The bow exerts a pressure on the string. Let us call $\mathbf{N}$ the corresponding normal force. Moreover there exists a tangential force $\mathbf{F}$ exerted by the bow while drawing across the string. According to Coulomb's laws of dry friction, the intensity F of this tangential force is such as :
 - Whenever the bow is sliding on the string then $F = \mu_K N$
 - If there is no sliding (then the bow is stuck on the string) then $F \leq \mu_S N$
 - μ_K and μ_S are the kinetic and static coefficients of friction respectively. Usually $\mu_K < \mu_S$.

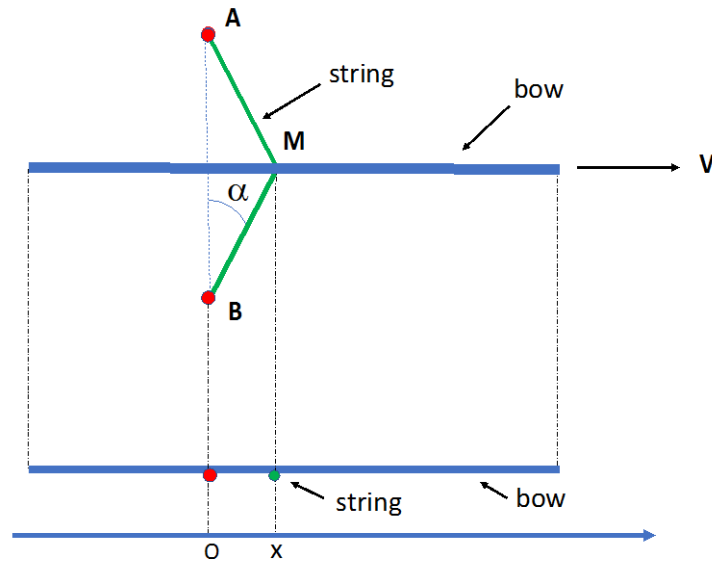


Figure 1. Above : schematic top view (not at scale) of the string (in green) and the bow (in blue). A and B are fixed points. Below: sectional view of the string and the bow.

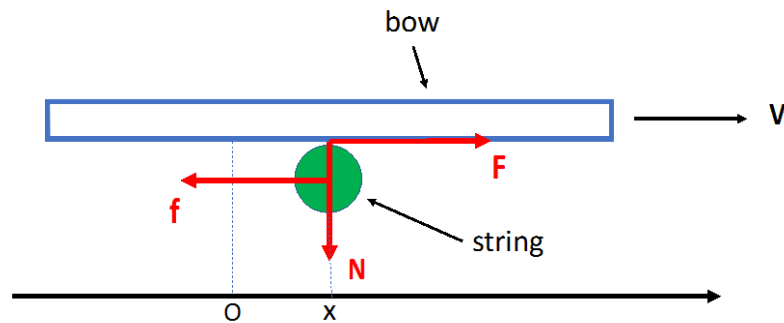


Figure 2: Detail of the forces exerted on the string: $\mathbf{N}$ is the normal force exerted by the bow on the string, $\mathbf{F}$ is the tangential force of friction and $\mathbf{f}$ is the elastic restoring force exerted by the string (see question 1).

A. Modeling the string as an effective spring-mass system.

- 1) The bow is pressed again the string in the middle of the string. Prove that the string exerts a restoring force (which brings it back to its equilibrium position) that writes:

$$f = -2 \frac{T}{L} x$$

- 2) Assuming that the string keeps a triangular shape while moving (both parts AM and BM of the string remain straight), find the equation of motion of the part AM as a

function of the angle α . Hence deduce that the string vibrates with the angular frequency

$$\Omega = \frac{\sqrt{3}}{L} \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

- 3) Deduce from the questions 1) and 2) that the violin string behaves as an effective spring-mass system. Give the elastic constant K and mass M_{eff} of this spring-mass system. Check that $M_{\text{eff}} = \frac{2}{3} \lambda L$.
- 4) Compare Ω with the angular frequency ω of the fundamental harmonic of a vibrating string with same length L , same tension T and same linear mass density λ (the angular frequency of the fundamental harmonic is the smallest angular frequency at which the string can vibrate). Let us recall that the speed of propagation of waves in a string with tension T and linear mass density λ is

$$c = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

B. Dynamics of the string when the violinist draws the bow across.

From now on the violin string will be replaced by the effective spring-mass system specified in the previous part.

- 5) What is the relaxed length of the effective spring ?
- 6) At time $t=0$, the point mass M_{eff} is at rest at $x=0$ (see Figure 2) and is pressed upon by the bow with a normal force N . The bow draws across the effective mass with speed V in the direction of increasing x . Hence the bow is sliding at $t=0$. Write the equation of motion of the effective mass.
- 7) This equation is valid as long as $\dot{x} < V$. Prove that this inequality is satisfied at every time t if the ratio $\frac{N}{V}$ is below some threshold that you will express as a function of T , λ and μ_K .
- 8) Let us now assume that the ratio $\frac{N}{V}$ is larger than the threshold. Then $\dot{x} = V$ at some time t_1 . What is the equation satisfied by t_1 ? What is the motion of the effective mass when $t > t_1$?
- 9) Prove that there exists a time t_2 for which the bow starts sliding again on the effective mass. What is the motion of the effective mass when $t > t_2$? Express the amplitude of this motion as a function of N , V , L , T , λ and μ_S .
- 10) Prove that there exists a time t_3 for which the effective mass sticks again on the bow. What is then the position x of the effective mass ? Hence deduce that the motion of the effective mass has become periodic and plot the shape of $x(t)$.

- 11) The violinist wants to play louder. What should he do : press stronger on the bow or draw the bow faster across the string ?
- 12) The bow is made of hairs coated with some particular material called colophony. According to the modeling performed in the previous questions, what kind of mechanical property colophony has been selected for by violinists ?

II. Cavitation

Let us consider a spherical empty cavity of radius a , centered in a large spherical volume of liquid of radius $A \gg a$. At time $t = 0$, the liquid is at rest. The external pressure, exerted on the outside of the liquid sphere is P_0 . The mass per unit volume of the liquid is denoted ρ . The liquid is assumed to be incompressible.

- 1) By means of dimensional analysis, give an expression of the collapse time τ of the cavity, as a function of P_0 , ρ and a . What is the order of magnitude of τ for a cavity of radius $a = 1 \text{ mm}$? You will assume that P_0 is the atmospheric pressure ($P_0 = 10^5 \text{ Pa}$) and that the liquid is water, hence $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

In order to understand the physical mechanism of the cavity collapse, we want to derive an equation for the radius, $R(t)$, of the cavity as a function of time. Note that $R(t=0) = a$.

- 2) Let us use spherical coordinates with the origin in the center of the cavity. When considering the symmetry of the system, prove that the velocity field of the liquid, in every point $\mathbf{r}$ and at every time t , writes :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = V(t) \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

where r is the radial distance and $\mathbf{e}_r$ is the unit vector in the direction of increasing r .

- 3) What represents $V(t)$? Show that $V(t)$ can be written very simply from $R(t)$.
- 4) Express the kinetic energy of the liquid at every time t . How does it depend on A ? Prove that it converges when A goes to infinity and give the limit.
- 5) Express the work of the pressure forces during the compression of the cavity from its initial radius a to its instant radius $R(t)$.
- 6) Hence deduce that $R(t)$ satisfies the following differential equation :

$$\dot{R}^2 = \frac{2 P_0}{3 \rho} \left(\frac{a^3 - R^3}{R^3} \right)$$

- 7) Finally deduce an expression for the collapse time of the cavity and compare it with the expression obtained in the first question by means of dimensional analysis.

III. How to measure the flow rate of a river?

In order to measure the flow rate of a river, one pours a mass m of dye in the river and one measures the dye concentration $c(t)$, in kg.m^{-3} , as a function of time downstream. Let us assume that the distance between the place where the dye is poured and the place where the concentration is measured is large enough so that the dye has been mixed with water and the concentration is uniform in the cross-sectional plane of the river bed where the measure is performed.

- 1) Plot the shape of the concentration $c(t)$ as a function of time.
- 2) Express the volumetric flow rate D of the river (in $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$) as a function of the dye mass m (in kg) and the concentration plot $c(t)$.

CONCOURS D'ADMISSION 2018 – FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

SESSION DE PRINTEMPS

PHYSIQUE

(Durée : 2 heures)

Les trois problèmes sont indépendants. Si vous êtes bloqué sur une question, nous vous recommandons d'accepter le résultat de cette question et de passer à la question suivante. Les différentes questions sont en grande partie indépendantes.

L'usage des calculatrices électroniques est interdit.

Les vecteurs sont désignés par des lettres en gras dans les deux premiers problèmes.

I. Physique des cordes frottées

On étudie dans ce problème un modèle permettant de comprendre comment on produit un son avec une corde vibrante frottée par un archet, comme c'est le cas pour tous les instruments dits « à cordes frottées » comme le violon, le violoncelle, la contrebasse etc.

On considère une corde de violon sur laquelle un musicien frotte son archet (Figure 1) :

- (i) La corde est tendue et on note T sa tension
- (ii) On note $2L$ la longueur de la corde et λ sa masse linéique
- (iii) On rappelle que le moment d'inertie I d'une barre homogène de longueur L et de masse linéique λ , par rapport à l'une de ses extrémités, est égal à $I = \frac{1}{3} \lambda L^3$
- (iv) Le musicien tire sur l'archet avec une vitesse constante de module V
- (v) Le musicien appuie sur la corde avec son archet en exerçant une force normale $\mathbf{N}$. Selon les lois de Coulomb du frottement solide, on sait que la force exercée par le musicien a également une composante tangentielle $\mathbf{F}$ (voir Figure 2), dont le module F est tel que :
 - s'il y a glissement de l'archet sur la corde alors $F = \mu_D N$
 - s'il n'y a pas de glissement (l'archet est alors collé sur la corde) $F \leq \mu_S N$
 - μ_D et μ_S sont appelés respectivement coefficient de frottement dynamique et statique. On a généralement $\mu_D < \mu_S$.

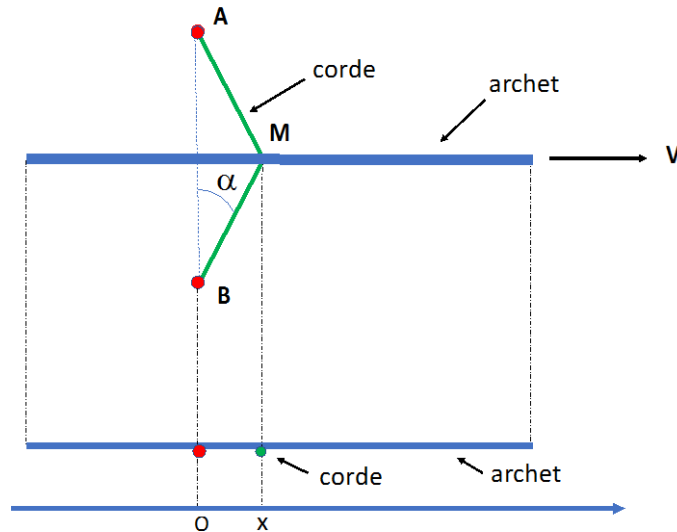


Figure 1. En haut : vue de dessus de la corde vibrante (en vert) et de l'archet (en bleu). A et B sont des points fixes. Les échelles ne sont pas respectées. En bas : coupe transversale de la corde et de l'archet.

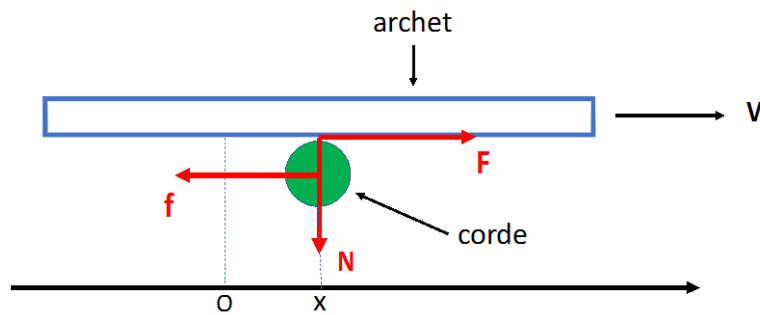


Figure 2. Zoom de la coupe transversale de la Figure 1 donnant le détail des forces s'exerçant sur la corde : N est la force normale exercée par l'archet sur la corde, F la force tangentielle de frottement et f la force de rappel élastique exercée par la corde (voir question 1).

A. Modèle masse-ressort effectif.

- 1) On considère que l'archet est appuyé sur la corde en son milieu. Montrer que la corde exerce une force de rappel (qui la ramène vers sa position d'équilibre) de la forme :

$$f = -2 \frac{T}{L} x$$

- 2) En supposant que la corde garde une forme triangulaire au cours de son mouvement (les portions de corde AM et BM restent des droites), écrire l'équation de la dynamique de la portion AM en fonction de l'angle α . En déduire que la corde vibre avec la pulsation

$$\Omega = \frac{\sqrt{3}}{L} \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

- 3) Déduire des questions 1) et 2) que la corde de violon se comporte comme un système masse-ressort effectif dont on donnera la constante élastique K et la masse M_{eff} . Vérifier que $M_{\text{eff}} = \frac{2}{3} \lambda L$.
- 4) Comparer Ω avec la pulsation fondamentale ω d'une corde vibrante (la pulsation fondamentale est la pulsation minimale avec laquelle la corde peut osciller). On rappelle que la célérité des ondes sur une corde vibrante dont la tension est T et la masse linéique λ est

$$c = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

B. Dynamique de la corde frottée.

A partir de maintenant on remplace la corde de violon par le système masse-ressort effectif trouvé à la question précédente.

- 5) Quelle est la longueur au repos du ressort effectif ?
- 6) A l'instant $t=0$ la masse effective, supposée ponctuelle, se trouve en $x=0$ (voir Figure 2) sans vitesse initiale. L'archet est plaqué sur la masse effective avec une force normale N et se déplace à la vitesse V dans la direction des x croissants. L'archet glisse donc sur la masse effective à l'instant $t=0$.   crire l'équation du mouvement de la masse effective.
- 7) Cette équation reste valable tant que $\dot{x} < V$. Montrer que cette inégalité est vérifiée à tout instant si le rapport $\frac{N}{V}$ reste inférieur à une valeur seuil qu'on exprimera en fonction de T , λ et μ_D .
- 8) On suppose maintenant que le rapport $\frac{N}{V}$ est supérieur au seuil calculé précédemment. Il existe alors un instant t_1 pour lequel $\dot{x} = V$. Quelle équation vérifie t_1 ? Décrire le mouvement de la masse effective pour $t > t_1$.
- 9) Montrer qu'il existe un instant t_2 pour lequel la masse effective recommence à glisser par rapport à l'archet. Quel est le mouvement de la masse effective pour $t > t_2$? On exprimera l'amplitude du mouvement en fonction de N , V , L , T , λ et μ_S .
- 10) Montrer qu'il existe un instant t_3 pour lequel la masse se colle à nouveau sur l'archet. Que vaut alors x ? En déduire que le mouvement est devenu périodique et tracer l'allure de $x(t)$.
- 11) Le musicien veut jouer plus fort. Que doit-il faire : appuyer plus fort sur l'archet ou déplacer plus vite l'archet ?

- 12) L'archet est composé de fils enduits d'une substance particulière appelée colophane. Au vu des résultats précédents, pour quelle propriété mécanique la colophane a-t-elle été choisie par les violonistes ?

II. Cavitation

On considère une cavité sphérique de rayon a , vide de matière, située au centre d'un grand volume de liquide, supposé également sphérique, de rayon $A \gg a$. A l'instant $t=0$, le liquide est au repos. La pression extérieure, exercée sur la sphère liquide de rayon A , vaut P_0 . On note ρ la masse volumique du liquide, supposé incompressible.

- 1) A l'aide d'une analyse dimensionnelle, donner une expression du temps τ d'effondrement (collapse) de la cavité. On admettra que τ ne dépend que de P_0 , ρ et a . Quel est l'ordre de grandeur de τ pour une cavité de rayon $a = 1 \text{ mm}$? On supposera que P_0 est la pression atmosphérique ($P_0 = 10^5 \text{ Pa}$) et on prendra pour ρ la masse volumique de l'eau : $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

On cherche à comprendre le mécanisme physique de l'effondrement de la cavité. Pour cela on cherche une équation décrivant l'évolution au cours du temps du rayon de la cavité, noté $R(t)$. A l'instant initial on a $R(t=0) = a$.

- 2) On se place en coordonnées sphériques avec l'origine du repère au centre de la cavité. En considérant les symétries du problème, montrer que le champ de vitesses de l'eau en tout point $\mathbf{r}$ et à tout instant t s'écrit, pour $r > R(t)$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = V(t) \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

avec r la distance radiale et $\mathbf{e}_r$ le vecteur unitaire dans la direction des r croissants.

- 3) Que représente $V(t)$? Montrer que $V(t)$ s'exprime très simplement à partir de $R(t)$.
- 4) Exprimer l'énergie cinétique du liquide à tout instant t . Comment dépend-elle de A ? Montrer qu'elle converge quand A tend vers l'infini et donner sa limite.
- 5) Exprimer le travail des forces de pression au cours de la transformation faisant passer le rayon de la cavité de sa valeur initiale a à sa valeur $R(t)$ à l'instant t .
- 6) En déduire une équation différentielle pour $R(t)$. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{R}^2 = \frac{2 P_0}{3 \rho} \left(\frac{a^3 - R^3}{R^3} \right)$$

- 7) En déduire une expression du temps d'effondrement de la cavité et comparer avec l'expression obtenue à la première question par analyse dimensionnelle.

III. Mesure de débits

On cherche à mesurer le débit d'une rivière. Pour cela on verse une masse m de colorant dans la rivière et on mesure en aval la concentration $c(t)$, en kg.m^{-3} , de colorant au cours du temps. On suppose que la distance entre le lieu où on verse le colorant et celui où on mesure la concentration est suffisante pour permettre au colorant de se mélanger à l'eau de la rivière de telle sorte que la concentration peut être considérée comme homogène dans toute la section de la rivière à l'endroit où on fait la mesure.

- 1) Tracer l'allure de la concentration $c(t)$ en fonction du temps.
- 2) Exprimer le débit volumique D (en $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$) à partir de la masse m (en kg) et de la fonction $c(t)$.