English version

CONCOURS D'ADMISSION 2020

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE (FUI)

MATHEMATICS

Duration: 3 hours

The use of electronic calculators is forbidden.

Problem 1. Convergence of sequences.

Given a real sequence $(u_n)_{n\geqslant 1}$, for every $n \geqslant 1$ we set

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

We say that the sequence $(u_n)_{n\geqslant 1}$ is C-convergent if $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converges to some limit $\ell \in \mathbb{R}$.

This problem deals with several aspects of the notion of C-convergence. The six numbered questions are independent.

1. Prove carefully that if $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converges, then it is also C-convergent, and that with the above notation, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

2. (a) Let $(u_n)_{n\geqslant 1}$ be a sequence with positive values, such that $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converges to $\ell > 0$ as $n \to \infty$. Show that $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$.

(b) Application: prove that $(n!)^{\frac{1}{n}} \sim ne^{-1}$ as $n \to \infty$.

3. Does C-convergence imply convergence?

4. In this question the following result is proved: if $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converges to ℓ and if furthermore

$$|u_{n+1} - u_n| = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

then (u_n) converges to ℓ.

(a) Prove that for every $n \geqslant 1$ the following holds (here we put $u_0 = 0$)

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) + (n+1)u_n.$$

(b) Conclude.

5. Show that for every $\ell \in [-1, 1]$ there exists a sequence $(u_n)_{n\geqslant 1}$ with values in $\{-1, 1\}$ such that (S_n) converges to ℓ. (*Hint*: you may use the law of large numbers.)

6. Let $(x_n)_{n\geqslant 1}$ be the sequence defined by

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ \forall n \geqslant 1,\ x_{n+1} = \sin(x_n). \end{cases}$$

(a) Show that (x_n) is non-increasing and deduce that (x_n) tends to 0.

(b) Show that there exists a unique real number α such that the sequence $\left(x_{n+1}^{\alpha} - x_n^{\alpha}\right)$ converges to some non-zero limit ℓ. Give the values of α and ℓ.

(c) Deduce that $x_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$ as $n \to \infty$.

Problem 2. A differential equation.

We consider the differential equation

$$ty'' + ty' - y = 0 \tag{E}$$

where $y : t \mapsto y(t)$ denotes a C^2 function on $(0, +\infty)$.

1. Find a polynomial solution of (E).

2. We define F on $(0, +\infty)$ by

$$F(t) = \int_1^t \frac{e^{-s}}{s^2} ds.$$

(a) Study the variations of F as well as the existence of finite or infinite limits at the boundaries of its domain.

(b) Show that the function g defined on $(0, +\infty)$ by the formula

$$g(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

admits a continuous extension at 0.

(c) Prove the existence of a constant c such that

$$F(t) = -\frac{1}{t} - \ln t + c + o(1) \text{ as } t \to 0^+.$$

3. We put $z(t) = \frac{y(t)}{t}$, where y is a solution of (E). Show that z' is the solution of a linear differential equation of degree 1 and use this to deduce all the solutions of (E).

4. Show that all the solutions of (E) have a continuous extension at 0.

5. Determine the set of solutions of (E) admitting a C^1 extension at 0.

Problem 3. Linear algebra.

Let $M_{k,\ell}(\mathbb{R})$ be the vector space of real matrices with k rows and ℓ columns and $M_n(\mathbb{R})$ be the space of square matrices of size n. In this problem we study the subspaces of $M_n(\mathbb{R})$ made of matrices of rank bounded by some $r \leqslant n$.

In the problem we identify a matrix $M \in M_n(\mathbb{R})$ and the associated linear map $X \mapsto MX$ in $M_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$. The transpose of a matrix M is denoted by $M^\intercal$. The identity matrix of size n is denoted by I_n and $J_r \in M_n(\mathbb{R})$ is the following block-matrix:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Recall that $GL_n(\mathbb{R})$ is the group of invertible n-by-n matrices.

1. Let $M \in M_n(\mathbb{R})$. Show that the following two conditions are equivalent:

(i) M has rank r.

(ii) There exists P and Q in $GL_n(\mathbb{R})$ such that $M = PJ_rQ$.

2. Given $M \in M_n(\mathbb{R})$ show that $M = 0$ if and only if $M^\intercal M = 0$.

3. Let $M \in M_n(\mathbb{R})$ expressed in block form as $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, with $A \in GL_r(\mathbb{R})$, $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ and $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$.

(a) Show that $\operatorname{rank}(M) \geqslant r$.

(b) Let $Z \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ be a vector expressed in block form as $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, with $X \in M_{r,1}(\mathbb{R})$ and $Y \in M_{n-r,1}(\mathbb{R})$. Show that the condition $Z \in \ker(M)$ is equivalent to a condition involving Y only.

(c) Deduce that $\operatorname{rank}(M) = r$ if and only if $D - CA^{-1}B = 0$.

4. Let V be a vector subspace of $M_n(\mathbb{R})$ such that for every $M \in V$, $\operatorname{rank}(M) \leqslant r$. We first assume that $J_r \in V$. Define

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\intercal & D \end{pmatrix},\ B \in M_{r,n-r}(\mathbb{R}),\ D \in M_{n-r}(\mathbb{R}) \right\}.$$

(a) Show that $V \cap W = \{0\}$ (*Hint:* given $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\intercal & D \end{pmatrix} \in V$, by using the fact that $J_r \in V$, show that $D = B^\intercal B = 0$.)

(b) Deduce that $\dim(V) \leqslant nr$.

5. Let now V be an arbitrary subspace of $M_n(\mathbb{R})$ such that for every $M \in V$, $\operatorname{rank}(M) \leqslant r$. Show that $\dim(V) \leqslant nr$.

6. Prove that this inequality is optimal.

7. Let V be a subspace such that for every $M \in V$, $\operatorname{rank}(M) \leqslant r$. We further assume that there exists $M_0 \in V$ such that $\operatorname{rank}(M_0) = r$. Let

$$\Omega = \{M \in V,\ \operatorname{rank}(M) = r\}.$$

Show that Ω is an open and dense subset of V :

(a) first assuming that $M_0 = J_r$;

(b) then in the general case.

(*Hint*: to show the density, given $M \in V$ you may consider the line joining M and M_0.)

$\diamond$

CONCOURS D'ADMISSION 2020

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

FUI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Problème 1. Convergence de suites.

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs réelles, pour tout $n \geqslant 1$ on pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On dira que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est C-convergente si $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Le problème porte sur plusieurs aspects de la notion de C-convergence. Les six questions sont indépendantes.

1. Démontrer en détail que si une suite (u_n) est convergente alors elle est C-convergente et qu'avec les notations précédentes on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

2. (a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes strictement positifs, telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\ell > 0$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$.

(b) Application : montrer que $(n!)^{\frac{1}{n}} \sim ne^{-1}$ quand $n \to \infty$.

3. La C-convergence d'une suite (u_n) implique-t'elle sa convergence ?

4. Dans cette question on montre le théorème suivant : si $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ et si

$$|u_{n+1} - u_n| = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

alors (u_n) tend vers ℓ.

(a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a (en posant $u_0 = 0$)

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) + (n+1)u_n.$$

(b) Conclure.

5. Démontrer que pour tout $\ell \in [-1, 1]$ il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que (S_n) converge vers ℓ. (*Indication* : on pourra utiliser la loi des grands nombres)

6. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ \forall n \geqslant 1,\ x_{n+1} = \sin(x_n). \end{cases}$$

(a) Montrer que (x_n) est décroissante et en déduire que (x_n) tend vers 0.

(b) Montrer qu'il existe une unique réel α tel que la suite $\left(x_{n+1}^{\alpha} - x_n^{\alpha}\right)$ converge vers une limite ℓ non nulle. Préciser les valeurs de α et ℓ.

(c) En déduire que $x_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$ quand $n \to \infty$.

Problème 2. Une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle suivante

$$ty'' + ty' - y = 0 \tag{E}$$

où $y : t \mapsto y(t)$ est une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

1. Déterminer une solution polynomiale de l'équation (E).

2. On définit une fonction F sur $]0, +\infty[$ par

$$F(t) = \int_1^t \frac{e^{-s}}{s^2} ds.$$

(a) Déterminer les variations de F, et indiquer si F admet des limites finies ou infinies aux bornes de son intervalle de définition.

(b) Montrer que la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

se prolonge par continuité en 0.

(c) Montrer qu'il existe une constante c telle que

$$F(t) = -\frac{1}{t} - \ln t + c + o(1) \text{ pour } t \to 0^+.$$

3. On pose $z(t) = \frac{y(t)}{t}$. Montrer que z' vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

4. Montrer que toutes les solutions de (E) se prolongent continûment en 0.

5. Quelles sont les solutions de (E) admettant un prolongement C^1 en 0 ?

Problème 3. Algèbre linéaire.

Soit $M_{k,\ell}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à k lignes et ℓ colonnes, et $M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées de taille n. L'objet de ce problème est l'étude des sous espaces de $M_n(\mathbb{R})$ constitués de matrices de rang majoré.

Dans tout le problème on identifie une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ et l'application linéaire associée $X \mapsto MX$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$. La transposée d'une matrice M est notée $M^\intercal$. On note I_n la matrice identité de taille n et $J_r \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont l'expression par blocs est

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe des matrices inversibles de taille n.

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M est de rang r.

(ii) Il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PJ_rQ$.

2. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$ montrer que $M = 0$ si et seulement si $M^\intercal M = 0$.

3. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, que l'on écrit par blocs sous la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in GL_r(\mathbb{R})$, $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\operatorname{rang}(M) \geqslant r$.

(b) Soit $Z \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne écrit sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, avec $X \in M_{r,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in M_{n-r,1}(\mathbb{R})$. Montrer que la condition $Z \in \ker(M)$ est équivalente à une condition ne portant que sur Y.

(c) En déduire que $\operatorname{rang}(M) = r$ si et seulement si $D - CA^{-1}B = 0$.

4. Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $M \in V$, $\operatorname{rang}(M) \leqslant r$. On suppose dans un premier temps que $J_r \in V$. On pose également

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\intercal & D \end{pmatrix},\ B \in M_{r,n-r}(\mathbb{R}),\ D \in M_{n-r}(\mathbb{R}) \right\}.$$

(a) Montrer que $V \cap W = \{0\}$ (*Indication* : pour $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\intercal & D \end{pmatrix} \in V$, en utilisant le fait que $J_r \in V$, on montrera que $D = B^\intercal B = 0$.)

(b) En déduire que $\dim(V) \leqslant nr$.

5. Montrer que si V un sous-espace vectoriel quelconque de $M_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $M \in V$, $\operatorname{rang}(M) \leqslant r$ alors $\dim(V) \leqslant nr$.

6. Montrer que cette inégalité ne peut pas être améliorée.

7. Soit V un sous-espace vectoriel tel que pour tout $M \in V$, $\operatorname{rang}(M) \leqslant r$. On suppose également qu'il existe $M_0 \in V$ telle que $\operatorname{rang}(M_0) = r$ et on pose

$$\Omega = \{M \in V,\ \operatorname{rang}(M) = r\}.$$

Montrer que Ω est un ouvert dense de V :

(a) dans le cas où $M_0 = J_r$;

(b) puis dans le cas général.

(*Indication :* pour établir la densité, étant donnée $M \in V$ on pourra se placer dans la droite contenant M et M_0.)

◇