CONCOURS D'ADMISSION 2019

FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE : Session d'automne

MATHEMATICS

(Duration : 2 hours)

The test is made of three independent exercises, which may be treated in any order. The use of computing devices is not allowed.

⋆ ⋆ ⋆

Exercise 1 : Irrationality of π

The aim of this exercise is to show that π is an irrational number. We assume by way of contradiction that there exist positive integers a and b such that $\pi = \dfrac{a}{b}$.

For $n \in \mathbb{N}$ we let $P_n(X)$ be the polynomial

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X^n (a - bX)^n.$$

.

1. Compute the coefficients of P_n.
2. Show that for every $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ (where $P_n^{(k)}$ denotes the k^{th} derivative of P_n).
3. By using a symmetry of P_n, show that for every $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$.

   Let now I_n be defined by
   $$I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin(t) dt.$$
4. Prove that I_n tends to 0 when $n \to \infty$.
5. By using integration by parts, prove that for every n, I_n is an integer.
6. Conclude that π is irrational.

Exercise 2 : A calculation of the Gauss integral.

We let I be the Gauss integral

$$I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt,$$

and for $x \geqslant 0$ we define

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} dt.$$

1. Show that f is a well-defined continuous function on $[0, +\infty)$.
2. Determine $f(0)$ and $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Show that f is differentiable on $]0, +\infty)$ and that it satisfies the differential equation

$$f'(x) - f(x) = -\frac{2I}{\sqrt{x}}.$$

4. Determine all the solutions of this differential equation on $(0, \infty)$.
5. Deduce from the above the value of I.

Exercise 3 : Square roots of matrices.

In this exercise we study the existence of square roots in the space $M_2(\mathbb{R})$ of 2-by-2 matrices with real coefficients, that is for a given $M \in M_2(\mathbb{R})$, we look for a matrix A *with real coefficients* such that

$$A^2 = M.$$

0. Prove that if λ is an eigenvalue of A, then λ^2 is an eigenvalue of A^2.
1. Assume that M is diagonalizable with nonnegative eigenvalues. Show that M admits a square root in $M_2(\mathbb{R})$.
2. Assume that M has two non-zero eigenvalues of opposite sign. Does M admit a square root in $M_2(\mathbb{R})$?
3. Show that $-I_2$ admits a square root in $M_2(\mathbb{R})$ (where I_2 denotes the identity matrix).
4. We now assume that M is nilpotent and $M \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
   (a) Prove that $M^2 = 0$.
   (b) Does M admit a square root in $M_2(\mathbb{R})$?
5. We now assume that M admits a real non-zero eigenvalue but is not diagonalizable.
   (a) Prove that there exists $\lambda \in \mathbb{R}$ and a non-zero nilpotent matrix N such that $M = \lambda I + N$.
   (b) Assuming $\lambda > 0$, prove that M admits a square root in $M_2(\mathbb{R})$.
   (c) Assuming $\lambda < 0$, prove that M does not have a square root in $M_2(\mathbb{R})$.

⋆ ⋆ ⋆

CONCOURS D'ADMISSION 2019

FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE : Session d'automne

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 2 heures)

Le sujet est composé de trois exercices indépendants qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
L'utilisation des calculatrices et autres appareils électroniques est interdite.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 : Irrationalité de π

L'objet de cet exercice est de démontrer que π est un nombre irrationnel. Nous supposerons par l'absurde qu'il existe des entiers positifs a et b tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit le polynôme

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X^n (a - bX)^n.$$

.

1. Déterminer les coefficients de P_n.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ (où $P_n^{(k)}$ désigne le k^{e} polynôme dérivé de P_n).
3. En utilisant une propriété de symétrie de P_n, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$.

   On pose maintenant
   $$I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)dt.$$

4. Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
5. En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout n, I_n est un entier.
6. Conclure que π est irrationnel.

Exercice 2 : Un calcul de l'intégrale de Gauss.

Soit I l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

et pour $x \geqslant 0$ définissons

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} dt.$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer $f(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et qu'elle y satisfait l'équation différentielle

$$f'(x) - f(x) = -\frac{2I}{\sqrt{x}}.$$

4. Déterminer toutes les solutions de cette équation différentielle sur $]0, +\infty[$.
5. Déduire des questions précédentes la valeur de I.

Exercice 3 : Racines carrées de matrices.

Dans cet exercice on étudie l'existence de racines carrées dans l'espace $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2x2 à coefficients réels, c'est-à-dire que $M \in M_2(\mathbb{R})$ étant donnée, on recherche une matrice A *à coefficients réels* telle que

$$A^2 = M.$$

0. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors λ^2 est une valeur propre de A^2.
1. Supposons que M est diagonalisable et à valeurs propres positives. Montrer que M admet une racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$.
2. Supposons que M admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés. Est-ce que M admet une racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$?
3. Montrer que $-I_2$ admet une racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$ (ici I_2 désigne la matrice identité).
4. Supposons maintenant que M est nilpotente et que $M \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
   (a) Montrer que $M^2 = 0$.
   (b) M admet-elle une racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$?
5. Supposons maintenant que M admet une valeur propre réelle mais n'est pas diagonalisable.
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice nilpotente non nulle N tels que $M = \lambda I + N$.
   (b) En supposant $\lambda > 0$, montrer que M admet une racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$.
   (c) En supposant $\lambda < 0$, montrer que M n'admet pas de racine carrée dans $M_2(\mathbb{R})$.

⋆ ⋆ ⋆