CONCOURS D'ADMISSION 2018 **Session d'automne**

FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

MATHEMATICS

(Duration : 2 hours)

The three parts (Exercises 1 and 2, Problem) are independant.
The use of computing devices is not allowed

⋆⋆⋆

Exercise 1

Let a and b be two real numbers with $a < b$ and let f be a differentiable function from $[a, b]$ to $\mathbb{R}$ such that $f(a) = f(b) = 0$. We assume that f' is bounded on $[a, b]$ and let $K = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

1.1 Show that one has

$$\forall t \in [a, b]\colon |f(t)| \leq K(t - a) \quad \text{and} \quad \forall t \in [a, b]\colon |f(t)| \leq K(b - t). \tag{1}$$

1.2 Compute $\int_a^{(a+b)/2} (t - a)dt$.

1.3 Using the previous questions, show that one has

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq K\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Exercise 2

We denote by $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ the vector space of the real 3×3 matrices. We consider the following four matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.1 Let $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Show that the set

$$\mathcal{C}(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \colon BM = MB\}$$

is a linear subspace of $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2.2 Determine $\mathcal{C}(D)$.

2.3 Compute the products PQ and PDQ.

2.4 Let Φ_P the map from $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ to $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ which associates to any matrix N the matrix $P^{-1}NP$. The map Φ_P is a linear map from $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ to $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, the proof of this point is not asked for. Determine the composition product $\Phi_{P^{-1}} \circ \Phi_P$ which associates to any matrix $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ the matrix $\Phi_{P^{-1}}(\Phi_P(N))$.

2.5 By considering the image of $\mathcal{C}(A)$ by Φ_P and using the previous questions, determine the dimension of $\mathcal{C}(A)$.

Problem

The aim of the problem is to study the non-linear recurrence sequence $(u_n)_{n\geq 0}$ defined by

$$u_0 = 0,\ u_1 = L \ \text{ and, for } n \geq 0\colon u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}, \tag{2}$$

where L is a positive real number. We denote by m the minimum of the two numbers 1 and L and by M the maximum of those two numbers.

In Part A, we study the first properties of the sequence $(u_n)_{n\geq 0}$; in Part B, which is independent of Part A, we study an auxiliary linear recurrence sequence and in Part C we end the study of the sequence $(u_n)_{n\geq 0}$.

Part A, First properties of the sequence $(u_n)_{n\geq 0}$

A.1 Show that for $n \geq 1$, one has $m \leq u_n \leq 4M$.

A.2 Assuming that the sequence $(u_n)_{n\geq 0}$ converges, find the value of its limit.

Part B, An auxiliary linear recurrence sequence

In this part, K denotes a real number in the interval $(0, 1/2)$.

B.1 Let f be the quadratic polynomial defined by $f(x) = x^2 - Kx - K$. Compute $f(-1)$, $f(0)$ and $f(1)$ and show that f has two real roots (or in other words, the equation $f(x) = 0$ has two real solutions), which are denoted as $c < C$.

B.2 Let H be a positive number. We consider a sequence $(v_n)_{n\geq 0}$ satisfying

$$0 \leq v_0 \leq H,\ 0 \leq v_1 \leq HC \ \text{ and, for } n \geq 0\colon v_{n+2} = K\left(v_{n+1} + v_n\right). \tag{3}$$

Show that for any $n \geq 0$ one has $0 \leq v_n \leq HC^n$.

B.3 Show that the sequence $(v_n)_{n\geq 0}$ converges.

PART C, End of the study of the sequence $(u_n)_{n\geq 0}$

C.1 Show that for $n \geq 0$ one has

$$|u_{n+2} - 4| \leq \frac{|u_{n+1} - 4|}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} + \frac{|u_n - 4|}{\sqrt{u_n} + 2}. \tag{4}$$

C.2 Let $K = 1/(\sqrt{m}+2)$ and $(w_n)_{n\geq 0}$ be a linear recurrence sequence such that $w_0 \geq 4$, $w_1 \geq |L - 4|$ and, for $n \geq 2$: $w_{n+2} = K\,(w_{n+1} + w_n)$. Show that for any $n \geq 0$, one has $|u_n - 4| \leq w_n$.

C.3 Using the previous questions, show that the sequence $(u_n)_{n\geq 0}$ converges.

CONCOURS D'ADMISSION 2018 **Session d'automne**

FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

MATHÉMATIQUES

(Durée : 2 heures)

Les trois parties (Exercices 1 et 2, Problème) sont indépendantes.
L'utilisation des calculatrices est interdite dans cette épreuve

⋆⋆⋆

Exercice 1

Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$ et soit f une fonction dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On suppose que f' est bornée sur $[a, b]$ et on pose $K = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

1.1 Montrer qu'on a

$$\forall t \in [a, b] \colon |f(t)| \leq K(t - a) \quad \text{et} \quad \forall t \in [a, b] \colon |f(t)| \leq K(b - t). \tag{1}$$

1.2 Calculer $\int_a^{(a+b)/2} (t - a)dt$.

1.3 En utilisant les questions précédentes, montrer qu'on a

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq K\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Exercice 2

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 3×3. On considère les quatre matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.1 Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C}(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\colon BM = MB\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2.2 Déterminer $\mathcal{C}(D)$.

2.3 Calculer les produits PQ et PDQ.

2.4 Soit Φ_P l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui associe à toute matrice N la matrice $P^{-1}NP$. L'application Φ_P est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on ne demande pas de le démontrer. Déterminer le produit de composition $\Phi_{P^{-1}} \circ \Phi_P$ qui associe à toute matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $\Phi_{P^{-1}}(\Phi_P(N))$.

2.5 En considérant l'image de $\mathcal{C}(A)$ par Φ_P et en utilisant les questions précédentes, déterminer la dimension de $\mathcal{C}(A)$.

Problème

Le but du problème est l'étude de la suite récurrente non linéaire $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = L \text{ et, pour } n \geq 0\colon u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}, \tag{2}$$

où L est un nombre réel strictement positif. On note m le minimum des deux nombres 1 et L, et M le maximum de ces deux nombres.

Dans la Partie A, on étudie les premières propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$; dans la partie B, qui est indépendante de la Partie A, on étudie une suite récurrente linéaire auxiliaire, et dans la Partie C, on termine l'étude de la suite initiale $(u_n)_{n\geq 0}$.

Partie A, Premières propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

A.1 Montrer que pour $n \geq 1$, on a $m \leq u_n \leq 4M$.

A.2 En supposant que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, déterminer la valeur de sa limite.

Partie B, Une suite récurrente linéaire auxiliaire

Dans cette partie, K désigne un nombre réel de l'intervalle $]0, 1/2[$.

B.1 Soit f le polynôme quadratique défini par $f(x) = x^2 - Kx - K$. Calculer $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$ et montrer que f a deux racines réelles (ou, en d'autres termes, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles), que l'on notera $c < C$.

B.2 Soit H un nombre strictement positif. On considère une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ qui satisfait

$$0 \leq v_0 \leq H,\ 0 \leq v_1 \leq HC \text{ et, pour } n \geq 0\colon v_{n+2} = K\left(v_{n+1} + v_n\right). \tag{3}$$

Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $0 \leq v_n \leq HC^n$.

B.3 Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge.

PARTIE C, Fin de l'étude de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

C.1 Montrer que pour $n \geq 0$ on a

$$|u_{n+2} - 4| \leq \frac{|u_{n+1} - 4|}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} + \frac{|u_n - 4|}{\sqrt{u_n} + 2}. \tag{4}$$

C.2 Soit $K = 1/(\sqrt{m} + 2)$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ une suite récurrente linéaire telle que $w_0 \geq 4$, $w_1 \geq |L - 4|$ et, pour $n \geq 2$: $w_{n+2} = K(w_{n+1} + w_n)$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $|u_n - 4| \leq w_n$.

C.3 En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

CONCOURS D'ADMISSION 2018 Deuxième session,

FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

MATHEMATICS

(Duration : 2 hours)

The three parts are independent.
The use of any computing device is forbidden during this session

⋆ ⋆ ⋆

Part I

In this part, n denotes a positive integer; we denote by $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ the vector space of the $n \times n$ matrices with complex entries. We consider a polynomial P of positive degree p with complex coefficients. We write $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. We are interested in matrices A in $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ such that

$$P(A) = 0, \text{ where } P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k \text{ with } A^0 = \mathrm{Id}_n\,. \tag{1}$$

In this case, we say that A is a solution of (1).

I.1 Let λ be an eigenvalue of a solution A of (1). Show that one has $P(\lambda) = 0$.

I.2 Let A be a solution of (1) and Q an invertible matrix in $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Show that the matrix $Q^{-1}AQ$ is also a solution of (1).

In what follows, we consider the case $n = p = 2$ et $P(X) = X^2 - 1$; we are going to characterise the matrices A in $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ which are solution of

$$A^2 - \mathrm{Id}_2 = 0. \tag{2}$$

I.3 We first characterise the soultions of (2) which are upper triangular. Find all the triples of complex numbers (λ, μ, α) such that the matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

is a solution of (2).

I.4 Show that any matrix in $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ which admits the two eigenvalues 1 et -1 is similar to the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

I.5 Show that there exist three matrices A_1, A_2 and A_3 such that any solution of (2) is either A_1 or A_2, or is similar to A_3.

Part II

We consider the map f from $(0, \pi/2)$ to $(0, +\infty)$ defined by

$$f(x) = \tan x.$$

II.1 Show that this map is a bijection; in other words, show that this map is one-to-one and onto.

We denote by g the map from $(0, +\infty)$ to $(0, \pi/2)$ which is the reciprocal function of f. In other words, for x in $(0, \pi/2)$ and u in $(0, +\infty)$, the relations $f(x) = u$ and $g(u) = x$ are equivalent.

II.2 Let u be in $(0, +\infty)$. What is the value of $g(u) + g(1/u)$?

Let h be the map from $(0, \pi)$ into $\mathbb{R}$ which maps x to

$$h(x) = \pi - 2g\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2}\right).$$

II.3 Show that the map h is well defined and determine the set

$$\{h(x) \colon x \in (0, \pi)\}.$$

II.4 For $x \in (0, \pi)$, compute $h(h(x))$.

Part III

In this part we consider the sequence of real numbers $(u_n)_{n \geq 0}$ inductively defined by

$$u_0 > 0 \text{ and, for any } n \geq 1 : u_n = u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}. \tag{3}$$

III.1 Show that the sequence $(u_n)_{n \geq 0}$ is increasing and tends to $+\infty$.

III.2 For $n \geq 1$, express $u_n^2 - u_{n-1}^2$ in terms of u_{n-1} .

III.3 Show that for any integer $n \geq 1$, one has $u_n^2 \geq 2n$.

III.4 In this question, we prove an inequality which will be used in the sequel. Show that, for any integer $k \geq 2$, one has $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$. Deduce from that relation that, for any $N \geq 1$, one has

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln N. \tag{4}$$

III.5 Show that the sequence $\left(u_n^2/n\right)_{n\geq 1}$ converges.

III.6 Show that there exists a real number α such that the sequence $\left((u_n^2 - \alpha n)/\ln n\right)_{n\geq 2}$ converges. Find a simple function which is equivalent to $(u_n - \sqrt{\alpha n})$ when n tends to infinity.

CONCOURS D'ADMISSION 2018 Deuxième session,

FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

MATHÉMATIQUES

(Durée : 2 heures)

Les trois parties sont indépendantes.
L'utilisation des calculatrices est interdite dans cette épreuve

⋆⋆⋆

Partie I

Dans cette partie, n désigne un entier strictement positif ; on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients complexes. On considère un polynôme P de degré p strictement positif, à coefficients complexes. On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. On s'intéresse aux matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$P(A) = 0, \text{ où } P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k \text{ avec } A^0 = \mathrm{Id}_n\,. \tag{1}$$

On dit dans ce cas que A est solution de (1).

I.1 Soit λ une valeur propre d'une solution A de (1). Montrer que l'on a $P(\lambda) = 0$.

I.2 Soit A une solution de (1) et Q une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est inversible. Montrer que la matrice $Q^{-1}AQ$ est également solution de (1).

Dans la suite, on s'intéresse au cas où $n = p = 2$ et $P(X) = X^2 - 1$; on va caractériser les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ solutions de

$$A^2 - \mathrm{Id}_2 = 0. \tag{2}$$

I.3 On commence par caractériser les solutions de (2) qui sont triangulaires supérieures. Déterminer les triplets de nombres complexes (λ, μ, α) tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

est solution de (2).

I.4 Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ admettant les valeurs propres 1 et -1 est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

I.5 Montrer qu'il existe trois matrices A_1, A_2 et A_3 telles que toute solution de (2) est soit A_1, soit A_2 soit semblable à A_3.

Partie II

On considère l'application f de $]0, \pi/2[$ dans $]0, +\infty[$ définie par

$$f(x) = \tan x.$$

II.1 Montrer que cette application est bijective.

On note g l'application de $]0, +\infty[$ dans $]0, \pi/2[$, bijection réciproque de f. En d'autres termes pour x dans $]0, \pi/2[$ et u dans $]0, +\infty[$, on a l'équivalence de $f(x) = u$ et $g(u) = x$.

II.2 Soit u dans $]0, +\infty[$. Que vaut $g(u) + g(1/u)$?

Soit h l'application de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe

$$h(x) = \pi - 2g\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2}\right).$$

II.3 Montrer que la fonction h est bien définie et déterminer l'ensemble

$$\{h(x) \colon x \in]0, \pi[\}.$$

II.4 Pour $x \in]0, \pi[$, calculer $h(h(x))$.

Partie III

Dans cette partie, on considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ définie de façon récurrente par

$$u_0 > 0 \text{ et, pour tout } n \geq 1 : u_n = u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}. \tag{3}$$

III.1 Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et tend vers $+\infty$.

III.2 Pour $n \geq 1$, exprimer $u_n^2 - u_{n-1}^2$ en fonction de u_{n-1} .

III.3 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n^2 \geq 2n$.

III.4 On établit dans cette question une inégalité qui sera utile dans la suite. Montrer que, pour tout entier positif $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$. En déduire que pour tout $N \geq 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln N. \tag{4}$$

III.5 Montrer que la suite $\left(u_n^2/n\right)_{n\geq 1}$ est convergente.

III.6 Montrer qu'il existe un nombre réel α tel que la suite $\left((u_n^2 - \alpha n)/\ln n\right)_{n\geq 2}$ est convergente. Donner un équivalent de $(u_n - \sqrt{\alpha n})$ quand n tend vers l'infini.