English version

CONCOURS D'ADMISSION 2020

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE (FUI)

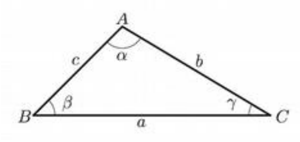
PHYSICS

Duration: 3 hours

The use of electronic calculators is forbidden.

Formulaire :

- Gradient of a function in spherical coordinates :
$$\vec{\text{grad}} f(r,\theta,\phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$
- Limited first-order development of the function : $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x$
- Al-Kashi's theorem : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$



- Calculation : $1/60^3 \sim 5\cdot 10^{-6}$.

Exercise 1 :

The Earth is assumed to be a rigid, homogeneous sphere (center T, radius R_T, mass M_T) completely covered by an ocean of negligible thickness compared to R_T, consisting of a homogeneous liquid, non-viscous, incompressible, of density ρ. Atmospheric pressure is assumed constant and uniform. We neglect the gravitational interactions between molecules of the liquid in all the problem. The fluid particle will be treated as a standard closed mechanical system to which the general theorems apply. The universal gravitational constant is noted G. It is recalled that the density of the voluminal forces of pressure in a liquid is written: $-\vec{\text{grad}}P$.

1. Write the fundamental principle of dynamics for an infinitesimal element of mass $\rho d\tau$ liquid located at the point A such that $\vec{r} = \vec{TA}$ assuming that the Earth does not move and is isolated in space.

2. Assuming that the water is at rest, and that the Earth is immobile and alone in space, show that the following potential is constant: $V(r) = G\dfrac{\rho M_T}{r} - P$.

3. Deduce the free form of the ocean's surface.

4. Give the expression of the acceleration of gravity *g* at the Earth's surface as a function of G, R_T and M_T. In the following one considers that *g* = 9,8 ms^{-2} in the liquid.

5. We now want to study the effect of the Moon, assuming it is a point mass, centered in L, located at a distance $D = TL$ from the center of the Earth and having mass M_L. One considers that the Earth-Moon system is isolated in space, and that the Earth does not turn on itself. We set $\vec{D} = \vec{TL}$and α the angle $(\widehat{\vec{TL},\vec{TA}})$. Draw a diagram.

6. Assuming that the Earth is only subject to the gravitationnal attraction of the Moon show that the inertial acceleration of the center of the Earth T in a Galilean reference is : $\vec{a}_e = \dfrac{GM_L\vec{D}}{D^3}$.

7. What is the form of the of the fundamental principle of dynamics for liquid in a frame linked to the Earth ? The additional terms, due to the presence of the Moon, form the acceleration generating tides $\vec{a}_M$.

8. Show that : $\vec{a}_M = -GM_L \left(\frac{\vec{LA}}{LA^3} - \frac{\vec{LT}}{LT^3} \right)$.

9. Give the expression of $\vec{a}_M$ when $D \gg R_T$ as a function of g, R_T, M_T, M_L, D and r. Show that it is maximal for $\alpha = 0$ and $\alpha = \pi$. Comment.

10. Compare its order of magnitude to the acceleration of gravity. Numerical application : $M_L \sim 0,01\ M_T$ et $D \sim 60\ R_T$.

11. One still considers the case $D \gg R_T$. Show that $\vec{a}_M$ derives from a potential :

$$W = -g \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^2}{2D^5} \left[3(\vec{D} \cdot \vec{r})^2 - r^2 D^2 \right],$$

that is : $\vec{a}_M = -\vec{\mathrm{grad}} W$.

12. Assuming that the water is at rest, find an expression involving the previous parameters verified in all the liquid. Deduce an equation characterizing the free surface.

13. Assume $s(\alpha)$ is the variation of the water level in the ocean due to the Moon attraction. By noticing that the water quantity at the Earth's surface is constant, justify that :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_T}^{R_T+s} r^2 dr \sin \alpha d\alpha d\phi = 0$$

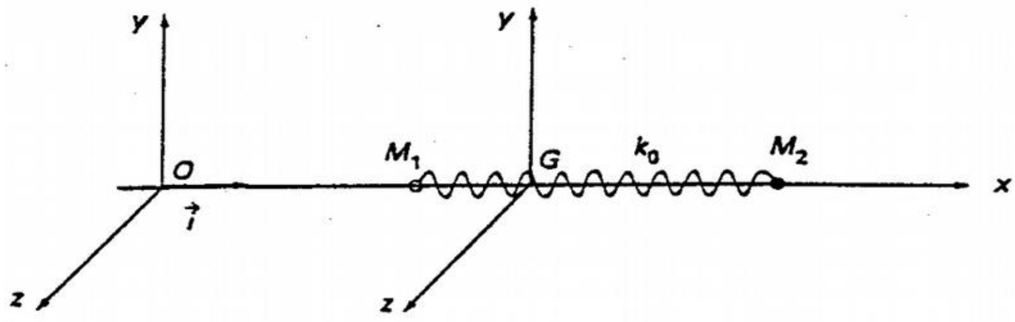
14. Deduce that :

$$s = \frac{1}{2} \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^4}{D^3} \left(3 \cos^2 \alpha - 1 \right).$$

Conclude.

Exercise 2 :

One considers the following system where the spring, of constant k_0 and zero-length l_0 is such that the potential energy of the two-masses system m_1 and m_2 located at points (M_1, M_2) is of the following form : $E_p = \frac{1}{2} k_0 \zeta^2 - \frac{1}{3} s k_0 \zeta^3$ where $\zeta = l - l_0$ and where s is a coefficient with a dimension. $l = M_1 M_2$ is the length at time t of the spring.



One defines the reduced mass of the system, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

1. Comment the form of the potential energy.

2. Give the dimension of the coefficient s.

3. In the case of an ideal spring, give the equation of motion for parameter $\zeta(t)$. One will solve the problem in the barycentric reference frame, that one will define.

4. Write the differential equation for $\zeta(t)$ in the general case.

5. From a graphical energy analysis, show that the solution of this differential equation can be periodic only if the total mechanical energy of the system E is lower than a value E_0 in the barycentric reference. Determine E_0.

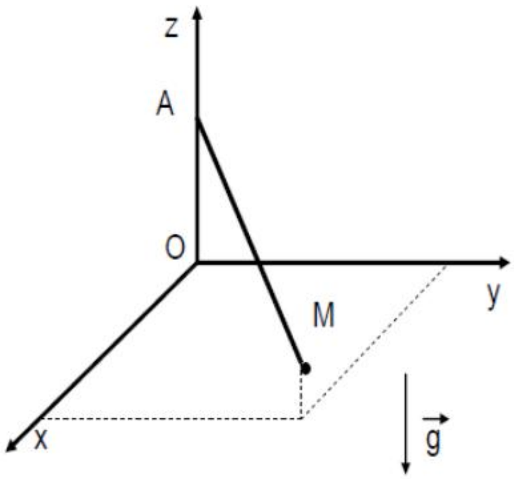
6. One assumes small oscillations in the neighborhood of the position of the stable equilibrium. By appropriately choosing the origin of time, we show that we can find, for the preceding differential equation, a solution of the form: $\zeta(t) = A(\cos\Omega t + q\cos 2\Omega t) + \zeta_1$ where q and ζ_1 are non-zero constants to be determined by specifying the approximations to be made.

7. Show that the time average $\langle\zeta\rangle$ is proportional, in the barycentric reference frame, to the total mechanical energy of an harmonic oscillator of rediced mass μ, of pulsation ω and of amplitude A.

Exercise 3:

A charged particle (mass m, charge q) is located at the extrem part M of a rigid rod AM of negligible mass and length l.

The motion of the rod in A is perfect and the system is immersed in an uniform magnetic field $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. At the equilibrium, M is in O and one considers only small movements around O.



1. Study the trajectory of the charged particle in the case where $B_0 = 0$. In particular one will study the projection of the trajectory in the plane xOy.

2. Give the general movement of the particle when $B_0 \neq 0$ and the inital conditions are: zero initial velocities, $x(0) = A$ and $y(0) = 0$.

We set : $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, $\omega_L = |q|B_0/(2m)$ and $\Omega = \sqrt{(\omega_0^2 + \omega_L^2)}$.

CONCOURS D'ADMISSION 2020

FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

FUI

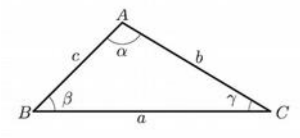
EPREUVE DE PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Formulaire :

- Gradient d'une fonction en coordonnées sphériques :
$$\vec{\text{grad}} f(r,\theta,\phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$
- Développement limité au premier ordre de la fonction : $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x$
- Théorême d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$



- Aide au calcul : $1/60^3 \sim 5\cdot 10^{-6}$.

Exercice 1 :

La Terre est assimilée à une sphère rigide, homogène (centre T, rayon R_T, masse M_T) entièrement recouverte d'un océan d'épaisseur négligeable par rapport à R_T, constitué d'un liquide homogène, non visqueux, incompressible, de masse volumique ρ. La pression atmosphérique P_0 est supposée constante et uniforme. On néglige les interactions gravitationnelles entre molécules du liquide dans tout le problème. On traitera la particule fluide comme un système mécanique fermé standard auquel s'appliquent les théorèmes généraux. La constante de gravitation universelle est notée G. On rappelle que la densité volumique des forces volumiques de pression dans un liquide s'écrit : $-\vec{\text{grad}}P$.

1. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour un élément infinitésimal de liquide de masse $\rho d\tau$ situé au point A tel que $\vec{r} = \vec{TA}$ dans l'hypothèse où la Terre est immobile et isolée dans l'espace.

2. En déduire que, dans l'hypothèse où l'eau est au repos, le potentiel suivant est constant : $V(r) = G\dfrac{\rho M_T}{r} - P$.

3. Donner l'équation de la forme de la surface de l'océan.

4. Exprimer l'accélération de la pesanteur g à la surface de la Terre en fonction de G, R_T et M_T. Par la suite on prend g = 9,8 ms^{-2} dans tout le liquide.

5. On s'intéresse à l'effet de la Lune maintenant, assimilée à une masse ponctuelle située à une distance $D = TL$ du centre de la Terre. On considère que l'ensemble Terre-Lune est isolé dans l'espace et on suppose que la Terre ne tourne pas sur elle-même. On pose $\vec{D} = \vec{TL}$ et α l'angle $(\widehat{TL, TA})$. Faire un schéma.

6. En supposant que la Terre est soumise à la seule attraction gravitationnelle lunaire, justifier que l'accélération d'entraînement du centre de la Terre T dans un référentiel galiléen vaut : $\vec{a}_e = \dfrac{GM_L\vec{D}}{D^3}$.

7. Que devient la relation fondamentale de la dynamique pour le liquide dans un référentiel lié à la Terre ? Les termes supplémentaires dus à la présence de la Lune forment l'accélération génératrice des marées $\vec{a}_M$.

8. Montrer que : $\vec{a}_M = -GM_L \left(\frac{\vec{LA}}{LA^3} - \frac{\vec{LT}}{LT^3} \right)$.

9. Exprimer l'accélération $\vec{a}_M$ lorsque $D \gg R_T$ en fonction de g, R_T, M_T, M_L, D et r. Montrer que cette accélération est maximale pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$. Commenter.

10. Comparer numériquement l'ordre de grandeur de son amplitude à l'accélération de la pesanteur. Application numérique : $M_L \sim 0,01\ M_T$ et $D \sim 60\ R_T$.

11. On considère toujours le cas $D \gg R_T$. Montrer que $\vec{a}_M$ dérive du potentiel :

$$W = -g\frac{M_L}{M_T}\frac{R_T^2}{2D^5}\left[3(\vec{D}\cdot\vec{r})^2 - r^2D^2\right],$$

c'est-à-dire que l'on peut écrire : $\vec{a}_M = -\vec{\text{grad}}W$.

12. L'eau étant au repos, trouver une relation vérifiée dans tout le liquide. En déduire une équation caractérisant la surface libre de l'océan.

13. Soit $s(\alpha)$ la variation de niveau de l'océan due à l'attraction lunaire. En remarquant que la quantité d'eau à la surface du globe reste constante, justifier que :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_T}^{R_T+s} r^2 dr \sin\alpha d\alpha d\phi = 0$$

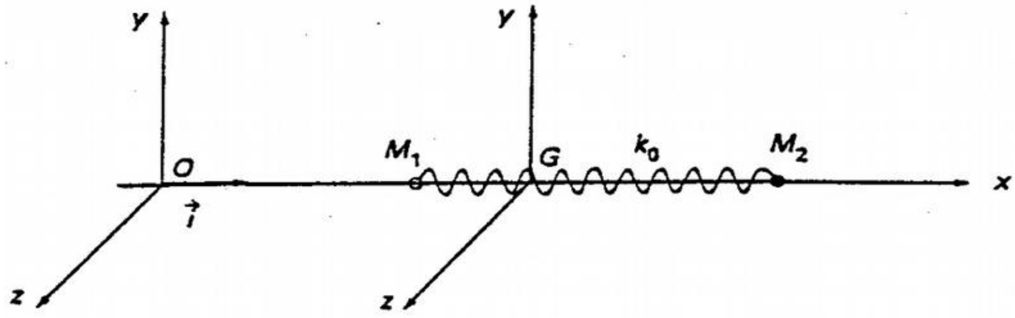
14. En déduire que :

$$s = \frac{1}{2}\frac{M_L}{M_T}\frac{R_T^4}{D^3}\left(3\cos^2\alpha - 1\right).$$

Conclure.

Exercice 2 :

On considère le dispositif mécanique suivant où le ressort, de constante de raideur k_0 et de longueur à vide l_0 est tel que l'énergie potentielle d'interaction du système constitué des deux masses m_1 et m_2 situées aux points (M_1, M_2) est de la forme : $E_p = \frac{1}{2}k_0\zeta^2 - \frac{1}{3}sk_0\zeta^3$ où $\zeta = l - l_0$ et où s est un coefficient dimensionné. $l = M_1M_2$ est la longueur instantanée du ressort.



On définit la masse réduite du système, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

1. Commenter la forme de l'énergie potentielle.

2. Donner la dimension du coefficient s.

3. Dans le cas d'un ressort idéal, donner l'équation permettant de déterminer $\zeta(t)$. On se placera dans le référentiel barycentrique du système, que l'on définira.

4. Écrire l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire $\zeta(t)$ dans le cas général.

5. A partir d'une analyse énergétique graphique, montrer que la solution de cette équation différentielle ne peut-être périodique que si l'énergie mécanique totale E du système (M_1, M_2) est inférieure à une valeur E_0 dans le référentiel barycentrique du système. Déterminer E_0.

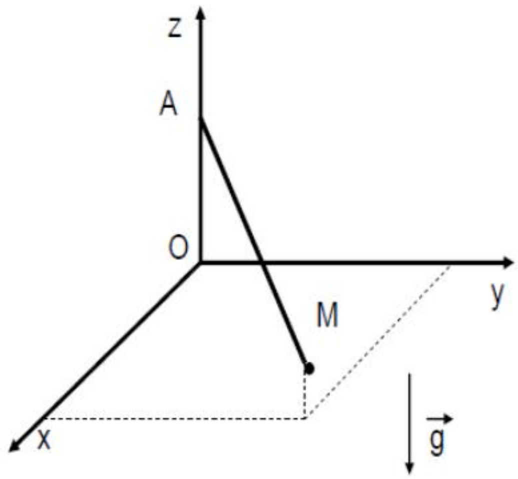
6. On se place dans l'hypothèse des petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre stable. En choisissant convenablement l'origine des temps, on montre qu'on peut rechercher, pour l'équation différentielle précédente une solution de la forme : $\zeta(t) = A(\cos\Omega t + q\cos 2\Omega t) + \zeta_1$ où q et ζ_1 sont des constantes non nulles à déterminer en précisant les approximations à faire.

7. Montrer que la moyenne temporelle $\langle\zeta\rangle$ est proportionnelle, dans le référentiel barycentrique, à l'énergie mécanique totale d'un oscillateur harmonique masse réduite μ, de pulsation ω et d'amplitude A.

Exercice 3:

Une particule chargée (masse m, charge q) est placée à l'extrémité M d'une tige AM de masse négligeable et de longueur l.

L'articulation en A est parfaite et le système est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. A l'équilibre M est en O et on ne s'intéresse qu'aux petits mouvements autour de O.



1. Étudier la trajectoire de la particule chargée dans le cas où $B_0 = 0$. On s'intéressera en particulier à la nature de la projection dans le plan xOy de cette trajectoire.

2. Reprendre cette étude dans le cas où $B_0 \neq 0$ et où les conditions initiales sont les suivantes : vitesses initiales nulles, $x(0) = A$ et $y(0) = 0$.

On posera : $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, $\omega_L = |q|B_0/(2m)$ et $\Omega = \sqrt{(\omega_0^2 + \omega_L^2)}$.